Е. М. Полищук

ЭМИЛЬ БОРЕЛЬ

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

РЕДКОЛЛЕГИЯ СЕРИИ «НАУЧНО-БИОГРАФИЧЕСКАЯ ЛИТЕРАТУРА»
И ИСТОРИКО-МЕТОДОЛОГИЧЕСКАЯ КОМИССИЯ ИНСТИТУТА ИСТОРИИ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ И ТЕХНИКИ АН СССР ПО РАЗРАБОТКЕ НАУЧНЫХ БИОГРАФИЙ ДЕЯТЕЛЕЙ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ И ТЕХНИКИ:

Л. Я. Бляхер, *А. Т. Григорьян*, *Б. М. Кедров*,
Б. Г. Кузнецов, *В. И. Кузнецов*, *А. И. Купцов*,
Б. В. Левшин, *С. Р. Микулинский*, *Д. В. Ознобишин*,
З. К. Соколовская (ученый секретарь), *В. Н. Сокольский*,
Ю. И. Соловьев, *А. С. Федоров* (зам. председателя),
И. А. Федосеев (зам. председателя), *Н. А. Фигуровский* (зам. председателя),
А. А. Чеканов, *С. В. Шухардин*, *А. П. Юшкевич*,
А. Л. Яншин (председатель), *М. Г. Ярошевский*.

Е. М. Полищук

ЭМИЛЬ БОРЕЛЬ

1871—1956

ЛЕНИНГРАД
«НАУКА»
ЛЕНИНГРАДСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
1980

УДК 92 Борель: «19» 517.5, 519.2

Эмиль Борель. Полищук Е. М. Л., «Наука», 1980. 169 с.

Книга посвящена яркой жизни и разносторонней деятельности Эмиля Бореля (1871—1956) — одного из известных французских математиков нового времени. Подробно рассказано о ставших классическими его открытиях в теории аналитических функций, теории расходящихся рядов, теории меры и интеграла, теоретической арифметике, о работах Бореля по теории вероятностей и ее приложениях, о его основополагающем вкладе в теорию стратегических игр. Большое внимание уделено организаторской, литературной и политической деятельности Бореля, дискуссиям, которые он вел со своими современниками — философами, биологами, математиками. Книга рассчитана на широкий круг читателей — математиков, механиков, физиков и всех, интересующихся историей математики и естествознания. Библ. — 117 назв., ил. 9.

Ответственный редактор

Ф. А. МЕДВЕДЕВ

П $\frac{20201\text{-}203}{054(02)\text{-}80}$ 92-80.1702010000. © Издательство «Наука», 1980 г.

Введение

Судьба Эмиля Бореля была счастливой — долгий плодотворный творческий путь, высшие государственные и академические почести на его родине, прижизненное признание коллег всего мира. . . Немного найдется математиков нового времени, имя которых оказалось бы увековеченным в стольких понятиях: борелевские множества, мера Бореля, метод Бореля суммирования рядов и интегралов, полигон Бореля, неравенство Бореля в теории целых функций, теорема Пикара—Бореля, лемма Бореля—Кантелли в теории вероятностей. Без теоремы Бореля о покрытиях не обходится ни один учебник теории функций. С именем Бореля связаны истоки метрической теории чисел, теории стратегических игр, теории квазианалитических функций. . .

Считали, что Борель был философом и человеком действия. Философия Бореля — это прежде всего философия науки, философия позитивного знания. Он избегал высказываться в печати по вопросам онтологического и гносеологического характера в отвлеченном плане. Его детство и юность прошли в глубоко религиозной среде. Противоречивость человеческого существа — величие его ума и несовершенство, слабость его тела, смысл, предназначение человеческого существования, спорные положения евангельской догматики, таинство смерти — все это, терзавшее душу великого Паскаля, насколько можно судить, не было определяющим в умонастроениях и жизненном укладе Бореля. Он много писал о бесконечности, но не о вечности в эсхатологическом смысле слова. И если основатель теории множеств Георг Кантор видел в ней, помимо ее математического содержания, также путь к теологии, то для Бореля трансфинитные числа являлись средством матема-

тического анализа. Это была в высшей степени трезвая, реалистически мыслящая натура, в которой как нельзя лучше сочетались здравый смысл и физическое здоровье.

Но путь Бореля был усеян не только розами. Ураган первой мировой войны, участником которой он был, принес ему большое личное горе, а уже в семидесятилетнем возрасте, в начале 1941 г., он чуть было навсегда не остался в застенках тюрьмы Френ, куда был брошен гитлеровцами. Но и тогда и ранее, как только представлялась возможность, он немедленно возвращался к своим проблемам, к своим планам, являя своей кипучей деятельностью пример поистине самоотверженного труда в любых условиях.

Как и многим крупным ученым, Борелю было свойственно сочетание творческой деятельности и широты организационных инициатив. Однако вторая сторона имела у него столь резко выраженный характер, что обе тенденции, в конце концов, пришли в противоречие друг с другом, и это привело к коренному повороту характера его научной деятельности. Добившись к сорока годам поразительных успехов в теории функций (а этот термин Борель понимал очень широко, почти как анализ вообще), Борель неожиданно отошел от главного направления своих аналитических изысканий. И хотя ученый не нашел на новом направлении, которое избрал, такого множества конкретных результатов, как на прежнем, он стал здесь инициатором ряда важных начинаний, а многочисленные контакты со специалистами в прикладных областях стяжали ему славу исключительно разностороннего математика.

Кроме математики в собственном смысле слова, Бореля интересовало очень многое, можно сказать, все: аналитическая механика, статистическая механика, теория относительности, стратегические теории, азартные игры, генетика, экономика, вопросы преподавания, авиация. . . Обо всем этом Борель писал ясно и на высоком уровне.

Великие Максвелл и Больцман писали не только глубоко, ясно, но и поэтично. Максвелл обладал даром стихосложения, кроме того, мы встречаем у него цитаты из Гомера и Лукреция. Больцман сравнивал развитие физических теорий с логикой музыкальной драмы. В статье о трансфинитных числах коллега Бореля по Французской Академии, один из самых утонченных французских математиков XX в., Арно Данжуа поэтизирует порядки бесконечности, сравнивая их с порядками яркости далеких

звезд. Сколько раз высказывался Борель о трансфинитном! Но поэтизации этого у него нет. И все же Борель умеет увлечь читателя. Его язык прозрачен, непритязателен, прост. Он превосходно владел литературным слогом, в чем мы частично будем иметь возможность убедиться. Не случайно поэтому к Борелю тянулись и лица, далекие от математики, например, блестящий поэт Поль Валери был одним из самых близких его друзей.

Детство и юность. Годы учения. Начало творчества

Семья Оноре Бореля. Эмиль Борель родился 7 января 1871 г. на юге Франции, в Авейроне, в городке Аффрикане, получившем это название в честь монаха Аффрикана, павшего в этом месте в III в. н. э. от рук вестготов и причисленного к лику святых. Арочный мост через речку Сорг, построенный еще в те времена, замок-крепость XIV в., в котором при Карле IX гугеноты укрывались от своих преследователей, небольшая церквушка, примостившаяся к скале, — вот, пожалуй, и все достопримечательности этого городка. В основной французской энциклопедии «Ларусс» (после 1956 г.) еще сказано, что Аффрикан — родина Эмиля Бореля.

Авейрон расположен в самом высокогорном месте Франции, в южной оконечности ее центрального горного массива, где проходят цепи Севенских хребтов. Постоянные ветры доносят сюда ледяное дыхание Альп и Пиринейских пиков, но, несмотря на суровый климат и сравнительно бедную почву, Авейрон был и по сей день остается сельскохозяйственным районом, в котором крестьяне выращивают неплохие урожаи пшеницы, маиса, фруктов.

Отец будущего знаменитого математика, протестантский пастор Оноре Борель, был человеком небогатым, но начитанным, пользовавшимся добрым авторитетом у своих земляков и имевшим связи в Париже. Мать, урожденная Эмилия Тейсье Солье, была дочерью фабриканта сукон. Вопреки воле своего отца, она, отказавшись от приданого, без колебаний решилась соединить свою судьбу с Оноре Борелем, человеком иного круга и небольшого

достатка. Эмиль был их третьим и поздним ребенком, две его сестры были старше своего брата на 16 и 14 лет.

Семья жила в красивом и просторном доме XVIII в., принадлежавшем Авейронской консистории. В ней находилась протестантская школа, руководимая Оноре Борелем. Здесь же он принимал прихожан. Первым учителем Эмиля был его отец. В Аффрикане говорили, что сын пастора удивительный ребенок — начала геометрии он выучил чуть ли не в трехлетнем возрасте, еще до того, как научился читать и писать.

Эмиль пробыл в родительском доме до 11 лет, а затем продолжил учебу в Монтобане (центр протестантской теологии в провинции Авейрон), где проживала его старшая сестра, вышедшая замуж за тамошнего пастора Лебо. После успешных трехлетних занятий в Монтобанском лицее Эмиль почувствовал себя достаточно подготовленным к осуществлению мечты каждого юного французского провинциала: в Париж, в Париж!

Коллеж св. Варвары и Эколь Нормаль. Первые друзья и учителя Эмиля. В 1888 г. Эмиль — стипендиат и слушатель Коллежа святой Варвары в Париже, где судьба свела его с юношами, прибывшими с разных концов страны. Среди них был будущий крупный историк Шарль Сейнобо и широко одаренный Эдуар Эррио, интересовавшийся эллинистикой, историей музыки, философией, впоследствии выдающийся политический деятель. Деловая и в то же время непринужденная и веселая атмосфера, царившая в этом учебном заведении, мало соответствовала его названию.

Почти одновременно Эмиль прошел курс обучения в лицее Людовика Великого, дававшем обстоятельную подготовку для желающих посвятить себя изучению геометрии и механики.

В 1889 г., получив сразу первые премии на двух конкурсах, он был принят одновременно в Эколь Политекник и в Эколь Нормаль. Чтобы оценить это обстоятельство, надо учесть, что экзамены в этих тогда уже старинных учебных заведениях, в которых с момента их основания сотрудничали крупнейшие ученые Франции, были исключительно трудными [Л. 6, с. 13—16].

Об обстоятельствах дальнейшего пути Эмиля Бореля Луи де Бройль рассказывает так: «Друзья его семьи, парижские промышленники и торговцы, горячо совето-

вали Эмилю выбрать Эколь Политекник, доказывая, что с его физическими и умственными данными легко сделать блестящую деловую карьеру или карьеру в промышленности, добиться прекрасного материального положения и вступить в выгодный брак с девушкой из высших протестантских кругов Парижа. Но Бореля очень влекло к себе научное образование, в особенности математическое, он не придавал большого значения ни роскоши, ни светскому обществу, ни деньгам. С согласия своего отца он выбрал Эколь Нормаль. До поступления туда ему надлежало отбыть действительную военную службу в Монпелье, но в порядке исключения ему, простому солдату, разрешили посещать занятия в университете того города, в котором он проходил службу. Затем после двух лет учебы в Эколь Нормаль он в 1892 году выдержал кандидатский (выпускной, — *Е. П.*) экзамен. . .» [Л. 3, с. 67].

Фреше [Л. 5] добавляет к этому, что Борель выбрал именно Эколь Нормаль в результате встреч и бесед с Гастоном Дарбу, сын которого был сокурсником и товарищем Бореля по лицею Людовика. «Это обстоятельство, — вспоминал Борель в речи на торжественном заседании по случаю его семидесятилетия, — открыло мне доступ в семью знаменитого математика. Не забуду, с каким сердечным гостеприимством открылись передо мной, скромным молодым провинциалом, двери квартиры Дарбу, находившейся в одном из домов на улице Ге Люссака. И я узнал тогда, что Эколь Нормаль — это не только путь к знаниям, но и подготовка к теоретическим исследованиям. Я ощутил, какие интеллектуальные радости может принести жизнь, посвященная науке. Влияние, оказанное Дарбу на сделанный мною выбор, было решающим, да и сам он являлся для меня идеальным воплощением ученого» [Л. 4, с. 490].

Как геометр в собственном смысле слова Дарбу при жизни едва ли имел соперников. В 1922 г. в речи памяти Дарбу Борель привел высказывание Гильберта из его некролога «Гастон Дарбу», опубликованного в Германии в 1917 г. и появившегося во французском переводе в «Акта математика» в 1920 г.: «Как говорит Гильберт, ведущий математик Германии, „Теория поверхностей“ вместе с другими сочинениями французского геометра являет собой капитальный вклад в математику. То, что сделал Эвклид в третьем веке до нашей эры своим трудом и систематиза-

Гастон Дарбу (1842—1917).

цией трудов греческих геометров, Дарбу сделал в конце девятнадцатого столетия для геометрии современной. Его творение, подобно творению Эвклида, надолго сохранит педагогическую ценность и будет щедрым источником новых исследований. . . Оба они — Эвклид и Дарбу — жили и творили у берегов Средиземного моря (Дарбу был выходцем из Нима — города на южном побережье Франции, — *Е. П.*), там, где зародилась человеческая цивилизация» [194].

Грандиозный четырехтомный трактат Дарбу «Теория поверхностей» содержит множество новых оригинальных

результатов из разных областей анализа (дифференциальные уравнения, вариационное исчисление, аналитические функции). Кроме того, Дарбу принадлежат классические работы по теории интеграла, аналитической механике, асимптотике.

Свой творческий путь Борель начинал как геометр, и под влиянием именно Дарбу были написаны его первые работы.

Все же Борель не был особенно близок к Дарбу, и это, по-видимому, объясняется не только громадной разницей в возрасте и положении. Дарбу был человеком необычайно творческим, властным, крупным администратором и организатором. Он был воплощением тех качеств, которые потенциально существовали и зрели в молодом Бореле. Быть может, в этом одна из причин, по которой между ними не произошло подлинного сближения.

Представляется, что в общечеловеческом плане Борелю был ближе другой его наставник — профессор Эколь Нормаль Жюль Таннри. Статья Бореля памяти Таннри [128] проникнута исключительной теплотой и задушевностью. Борелю в нем нравится все: внешность, обаяние, манера общения с людьми, доброта. Научные заслуги Таннри не могли идти в сравнение с заслугами Дарбу, но Борель отмечает, что Таннри был разносторонним математиком с выраженной творческой инициативой, автором работ по дифференциальным уравнениям, высшей алгебре, дифференциальной геометрии. Написанный Ж. Таннри (совместо с Ж. Мольком) двухтомный трактат по теории эллиптических функций не утратил своего научного значения и в наше время. Таннри был блестящим педагогом, умевшим также учить искусству преподавания. Его курсы анализа и теории функций в начале XX в. были широко известны и переводились на иностранные языки, в том числе и на русский. В течение многих лет Таннри был директором Эколь Нормаль, и Борель подчеркивает, что каждый из слушателей мог доверить ему свои самые сокровенные тайны. Хотя дисциплина в школе была жесткая, Таннри не был строгим наставником. Но он становился непреклонным и суровым, если кто-либо совершал аморальный проступок.

Кроме перечисленных достоинств, Таннри обладал и литературным даром; он писал на абстрактно-философ-

ские и теологические темы. К последним, как уже говорилось, Борель не имел влечения.

Будучи слушателем Эколь Нормаль, Борель впервые встречается с выдающимися молодыми учеными — профессором лицея Бюффона Жаком Адамаром и профессором Полем Пенлеве, с которыми впоследствии его будут связывать сотрудничество и многолетняя дружба. Адамар был на шесть, а Пенлеве на восемь лет старше Бореля.

Карьера Пенлеве была поразительной: за блестящие работы по аналитической теории дифференциальных уравнений и аналитической динамике, которые высоко оценил Пуанкаре, в 37 лет он уже был избран во Французскую Академию наук. Влечение к политической деятельности в сочетании с организаторским и полемическим талантами впоследствии привели к тому, что Пенлеве стал одним из лидеров социалистической партии Франции. Он неоднократно входил в состав кабинета министров и даже возглавлял правительство в ответственные периоды жизни страны.

Человеком совсем другого склада был Адамар. Он также был далек от профессиональной ограниченности, но его деятельность целиком была посвящена науке. Многочисленные и выдающиеся достижения Адамара в чистой и прикладной математике снискали ему славу одного из величайших математиков его времени. Значительная часть работ Адамара, выполненных в XIX в., относится к теории аналитических функций, и здесь Борель оказался его достойным преемником и продолжателем.

Если в монографиях и учебниках по комплексному анализу имена Адамара и Бореля часто стоят рядом, то в книгах по теории функций вещественной переменной и теории множеств рядом с именем Бореля встречается имя Анри Лебега. Когда в 1893 г. Борель защитил диссертацию и начал свою педагогическую деятельность в Лилльском университете, студентом Эколь Нормаль становится 18-летний Анри Лебег, которому в недалеком будущем также суждено было стать гордостью французской науки.

И еще живы были тогда представители старшего поколения: Эрмит, Дарбу, Жордан. В расцвете сил находились Пикар, Аппель, Гурса. Не переставал удивлять математический мир своими мемуарами гениальный Пуанкаре, которому в 1893 г. шел сороковой год.

Какое созвездие имен! Нужно ли удивляться, что творцы двух великих теорий XIX в. — Георг Кантор и Софус Ли первое признание получили именно во Франции.

Софус Ли в Париже. В 1892 г. по приглашению Дарбу Ли посетил Францию. Эли Картан (еще одно блестящее имя!) об этом вспоминает так: «Софус Ли провел шесть месяцев в Париже, проявив большой интерес и доброжелательность к работам молодых французских математиков. Его часто можно было видеть за столом в кафе ля Сурс, на бульваре Сен-Мишель; нередко бывало, что белое мраморное покрытие одного из его столов оказывалось заполненным формулами, которые мэтр писал, чтобы пояснить свои идеи. Равнодушие, даже игнорирование, с которым были приняты первые работы Ли, теперь сменилось чувством восхищения; многие известные академии, кроме, однако, Берлинской, пожелали числить его своим членом. Во время пребывания Ли в Париже наша Академия наук избрала его своим членом-корреспондентом по секции геометрии.

В 1893 году, когда вышел третий том его большого сочинения („Теория групп преобразований“, — *Е. П.*), Ли посвятил его Эколь Нормаль. Этот знак уважения был честью для школы, где в свое время состоял Эварист Галуа и директор которой (тогдашний директор — Жюль Таннри) сознавал значимость исследований норвежского математика. Софусу Ли предстояло побывать в Париже еще через некоторое время, в 1895 году; он присутствовал тогда на праздновании столетия Эколь Нормаль и для книги, изданной по этому поводу, призванной отметить заслуги и славу этой школы, написал статью, исполненную глубокого восхищения работой Галуа».*

По-видимому, Борель тогда серьезно интересовался работами Ли, о чем свидетельствует прочитанный им в Лилльском университете курс «Группы преобразований в геометрии», вышедший в виде небольшой отдельной книги [23]. Эти же лекции были опубликованы в виде приложения ко второму тому «Аналитической геометрии» Нивенгловского, одного из учителей Бореля в Эколь Нормаль.

---

* *Cartan E.* Saphus Lie: Centenaire. — Les grands courants de la pensee mathematique. Paris, 1948, p. 55.

Не вдаваясь в общую теорию Ли, Борель излагает свойства ряда конкретных непрерывных групп, включая их алгебраические и дифференциальные варианты, теорию Ли контактных преобразований, дает теоретико-групповую трактовку геометрии сфер Дарбу. . . Лекции содержат интересные упражнения, некоторые из них примыкают к результатам работы Бореля [6] о сопряженных дифференциальных операторах.

Борель-геометр. В упомянутой речи [194] Борель дает широкую картину развития основных идей геометрии от Эвклида до Дарбу, рассказывает о вкладе своего соотечественника в дифференциальную геометрию, в которой им, в частности, был разработан кинематический метод (метод подвижного репера), о работах Дарбу, имеющих значение для теории поля и других разделов теоретической физики. Через много лет Борель к ним обратился в своих книгах по теории относительности.

Идеями Дарбу была навеяна и первая значительная работа Бореля «О сопряженном уравнении и некоторых системах дифференциальных уравнений» [6]. Основное ее содержание — геометрическая теория сопряженных дифференциальных операторов.

Это было уже вполне зрелое исследование молодого ученого, которому шел тогда лишь 21-й год. Работа представляет интерес как в биографическом, так и в математическом плане, однако краткому рассказу о ней будет предпослан ряд оговорок. Борель использует многомерные обобщения известных геометрических понятий: огибающие и ребро возврата семейства плоскостей, системы гиперплоскостей, лежащих на поверхности второго порядка (плоскости, образующие эту поверхность), асимптотические линии на поверхности, комплекс прямых, некоторые линии специального вида, лежащие в комплексе. . . Без определения этих понятий с соответствующей символикой и описания ситуации, в которой они используются, для чего потребовалось бы много страниц, нельзя дать достаточное представление об этой работе Бореля. В своем реферате по работе [6] Фреше все это опустил, а вместе с тем опустил и существенные ее результаты. Почти ничего не дает маленькая справка Бореля об этой работе [304, I, 171]. В известных книгах по дифференциальным уравнениям и дифференциальной геометрии она не освещается, возможно, потому, что оказалась на стыке двух дисцип-

лин. Рассказ о ее содержании с позиций, например, современной теории форм Пффафа в инволюции и кэлеровых многообразий завел бы нас слишком далеко. По изложенным причинам о работе Бореля [6] здесь будет сказано лишь немногим более, чем у Фреше.

Пусть задано уравнение:

$$L(y) = a_0(t)\, y^{(n)} + a_1(t)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)\, y = 0. \qquad (1)$$

Сопряженным ему называется уравнение:

$$L^*(y) = (a_0(t)\, y)^n + (a_1(t)\, y)^{(n-1)} + \ldots + (-1)^n a_n(t)\, y = 0. \qquad (2)$$

Как показал Лагранж, $(L^*)^* = L$, причем

$$\int [zL(y) - yL^*(z)]\, dt = A\,(t,\ y,\ \ldots,\ y^{(n-1)},\ z,\ z',\ \ldots,\ z^{(n-1)}),$$

где A линейно зависит от y, y', . . ., z, z'. . ., откуда следует, что если известен интеграл уравнения (1), то интегрирование (2) сводится к задаче о линейном уравнении n—1-го порядка.

Дальнейшие основные результаты в XIX в. о сопряженных уравнениях и системах сопряженных линейных уравнений восходят к Якоби, Фробениусу и особенно к Дарбу, подробно рассмотревшему уравнения нечетного порядка.

Пусть $\gamma = (x_1, \ldots x_n)$ и $\gamma^* = (u_1, \ldots u_n)$ — соответственно, системы линейно-независимых интегралов уравнений (1) и (2). Эти функции связаны равенствами:

$$\sum_1^n u_i x_i = 0, \qquad (3)$$

Кроме того, для них имеют место также дифференциальные соотношения *:

$$\sum_1^n u_i^{(\nu)} x_i = 0, \quad \nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1, \qquad (4)$$

которые Борель изучает в соответствии с теорией огибающих семейства многообразий.

---

* По поводу сопряженных уравнений и равенств (3), (4) см., например: *Сансоне*. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Т. I. М., ИЛ, 1953, с. 56, 93. У Сансоне на с. 91 имеется ссылка на рассматриваемую работу Бореля, но никакие его результаты не приводятся.

Исходя из (3), Борель рассматривает $x=(x_1, \ldots, x_n)$ как координаты точек, а $u=(u_1, \ldots, u_n)$ — как координаты плоскостей в пространстве и интерпретирует решения x, u, соответственно, как кривые γ, γ^* в n-мерном пространстве. Соотношение между их точками при одном и том же значении t оказывается взаимным, причем, как замечает Борель, последнее обстоятельство можно принять за определение сопряженности операторов L и L^*. Между x и u имеет место (коррелятивное) равенство:

$$u_i = \sum_j a_{ij} x_j$$

где a_{ij}, разумеется, вполне определены заданием уравнения (1) и выбором векторов — решений x и u), которое для самосопряженного оператора, $L^*=L$, в силу (3) дает

$$\varphi(x) = \sum a_{ij} x_i(t)\, x_j(t) = 0, \tag{5}$$

откуда видно, что кривая $x(t)$ лежит на поверхности S:

$$\varphi(x) = \sum a_{ij} x_i x_j = 0. \tag{6}$$

Для уравнения нечетного порядка ($n=2m+1$), как показал Дарбу, имеют место также равенства:

$$\varphi(x^\nu) = \sum a_{ij} x_i^{(\nu)}(t)\, x_j^{(\nu)}(t) = 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots, m. \tag{7}$$

Борель установил обратное: если выполняются (5) и (7), то $(x_1, \ldots, x_n)$ — система линейно-независимых решений линейного самосопряженного уравнения n-го порядка.

Вслед за этим Борель начинает подробное рассмотрение решений уравнения (1) нечетного порядка как линий, лежащих в квадрике (6). Для этого он подробно изучает геометрию поверхности S и, прежде всего, вопрос о семействах ее плоских образующих (для $n=3$ — это прямолинейные образующие поверхности второго порядка).

Центральное место в работе занимает следующий замеченный Борелем факт: решения γ уравнения (1) являются асимптотическими линиями поверхности S: в каждой точке $t \in \gamma$ соприкасающаяся к ней плоскость касается поверх-

ности S. Более того, асимптотические линии γ принадлежат линейным подмногообразиям P_{n-1} из семейства образующих гиперплоскостей поверхности S.

Для уравнения четного порядка в (6) имеет место $a_{ij}=-a_{ji}$, и для неконической поверхности ($\det|a_{ij}|\neq 0$) $\varphi(x)=0$ (случай конуса Борель также подробно рассмотрел). Поэтому предыдущие рассуждения приходится существенно изменить. Вместо поверхности S рассматривается квадрика:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_i u_j - x_j u_i) = 0, \tag{8}$$

которую Борель называет комплексом в пространстве переменных (x, u). Решения x и здесь интерпретируются как линии, лежащие на (8) и соприкасающиеся плоскости к которым в каждой точке принадлежат некоторым образующим этой квадрики.

Обнаруживается существенное различие уравнений (1) для четных и нечетных n. В первом случае знание асимптотических линий квадрики (6) позволяет найти решения без интегральных операций. Во втором — при аналогичных условиях для (8) еще требуется операция квадратуры.

К сказанному следует сделать такое замечание. Борель не классифицирует квадрики (6) по их сигнатурам и, следовательно, не различает здесь поверхности положительной и отрицательной кривизны. Этим самым он не различает вещественных и мнимых асимптотических линий, вещественных и мнимых решений. Впоследствии, упоминая о данной работе, Борель не назвал этого обстоятельства.

Весьма проста по формулировке задачи наиболее значительная геометрическая работа Бореля «Мемуар о перемещениях по сферическим траекториям» [89], удостоенный премии Вайана. Это сочинение явилось ответом на вопрос, поставленный Французской Академией наук: определить и исследовать все перемещения недеформируемой фигуры, при которых ее точки описывают сферические траектории.

До Бореля кинематическими задачами о сферических траекториях занимались различные авторы, в том числе и Дарбу. Однако ими были получены лишь разрозненные результаты, которые в совокупности оказались только

весьма частными случаями установленной Борелем общей классификации возможных перемещений. В этой работе, столь непохожей на другие его мемуары, Борель сумел замечательным образом упорядочить огромную информацию, которая, как он обнаружил, скрывается за простой постановкой задачи.

Пусть $O_1X_1Y_1Z_1$ — неподвижные оси, а $OXYZ$ — подвижные оси координат. Мы можем записать очевидные равенства:

$$x_1 = a + \alpha x + \alpha' y + \alpha'' z,$$
$$y_1 = b + \beta x + \beta' y + \beta'' z,$$
$$z_1 = c + \gamma x + \gamma' y + \gamma'' z,$$

причем смысл всех величин ясен и $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma''$ — функции времени t. Предположим, что при всех t расстояние между точками $(-x_1, -y_1, -z_1)$ и (x, y, z) имеет постоянное значение z. Тогда

$$(x_1 + a + \alpha x + \alpha' y + \alpha'' z)^2 + (y_1 + b + \beta x + \beta' y + \beta'' z)^2 + \\ + (z_1 + c + \gamma x + \gamma' y + \gamma'' z)^2 = r^2.$$

Последнее равенство можно переписать в виде:

$$\sum_1^{17} \mathcal{E}_i T_i = 0,$$

где $\mathcal{E}_i$ зависят лишь от пространственных координат, а T_i — функции времени t.

Таким образом, прежде всего требуется привлечение дополнительных ограничений на T_i и $\mathcal{E}_i$. Можно выбрать k независимых линейных соотношений между T_i и, соответственно, $17-k$ независимых линейных соотношений между $\mathcal{E}_i$. Возникает вопрос о перечислении подобных связей для различных k. И здесь можно отправляться либо от связей между $\mathcal{E}_i$, либо от связей между T_i, либо от равенств, связывающих переменные из обеих этих групп. Борель исходит из соотношений между T_i. Геометрически это означает, что сначала рассматриваются типы движений, а затем уже фигуры, точки которых описывают сферические траектории.

Итак, каковы типы линейных независимых соотношений между величинами T_i? Борель ограничивается лишь

наложением связей на 9 из них $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \gamma'', 1$.* Последующее показало, что оправдана даже такая суженная постановка вопроса. На этой скромной основе Борель развертывает исследование объемом в 128 страниц! Прежде всего он выражает косинусы углов через «параметры Олена Родрига»:

$$\alpha = \frac{\lambda^2 - \mu^2 - \nu^2 + \rho^2}{\Delta}, \quad \beta = \frac{r^2(\lambda\mu - \nu\rho)}{\Delta}, \quad \gamma = \frac{r^2(\lambda\nu - \mu\rho)}{\Delta},$$

$$\alpha' = \frac{\cdots}{\Delta}, \quad \beta' = \frac{\cdots}{\Delta}, \quad \gamma' = \frac{\cdots}{\Delta},$$

$$\alpha'' = \frac{\cdots}{\Delta}, \quad \beta'' = \frac{\cdots}{\Delta}, \quad \gamma'' = \frac{\cdots}{\Delta},$$

где $\Delta = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2$, а числители для α', β', γ', α'', β'', γ'' получаются путем очевидных перестановок числителей у α, β, γ. Отсюда видно, что линейным соотношениям между $\alpha, \ldots, \gamma'', 1$ соответствует однородное уравнение поверхности второго порядка (квадрика) в переменных λ, μ, ν, ρ, а совокупности линейных соотношений между $\alpha, \ldots, 1$ — пересечения подобных квадрик. Но пересечения $\rho = 0, 1, 2$ квадрик могут выражать лишь следующие геометрические образы: A — точка; B — прямая; C — коническое сечение; D — пространственная кривая третьего порядка; E — то же четвертого порядка; F — плоскость; G — квадрика; H — все пространство.

Случай A тривиален. Случаи E, G, H приводят к результатам, полученным другими авторами, но для случаев B, C, D, F Борель собирает богатую жатву новых результатов. Оказалось, что именно здесь обнаружилось наличие различного типа геометрических фигур, точки которых описывают сферические траектории.

Мемуар заканчивается подробной таблицей геометрических конфигураций, описывающих исследованные сферические движения. Некоторые из них возникают как пересечения соответствующих комплексно-сопряженных мнимых образов. Вопрос о полном описании сферических движений оказался, однако, не исчерпанным: «Мой мемуар содержит ряд пробелов: некоторые случаи — E и G — мною вовсе не рассмотрены, другие — D — исследованы

* Речь идет о линейных неоднородных соотношениях между косинусами; эти соотношения удобнее рассматривать как однородные, вводя дополнительно величину 1.

мало. Но результаты, полученные для случаев B, C, F, показывают, что мой метод несомненно плодотворен». Эти слова взяты из резюме мемуара [89], в котором указываются дальнейшие возможности исследования фундаментального уравнения $\sum_{1}^{17} \mathcal{E}_i T_i = 0$.

После закрытия конкурса Вайана и дешифровки девизов, под которыми были представлены присланные работы, Борелю стала известна работа английского геометра и механика Беннета. Отдавая должное своему конкуренту, Борель одновременно пояснил, почему исследование последнего представляется ему недостаточным.

Сам Борель больше к этим вопросам не возвращался. Замечательный мемуар, о котором только что было рассказано, был написан им как бы мимоходом, в очень короткий срок, в период, когда он был поглощен ставшими потом знаменитыми исследованиями по теории функций.

Главное направление

Диссертация и знаменитая лемма. Молодой преподаватель Лилльского университета Эмиль Борель провел в городе Лилле три очень плодотворных года. За это время он опубликовал в ведущих математических журналах страны 22 работы, а в июне 1894 г. защитил в Париже диссертацию «О некоторых вопросах теории функций» [8]. Председательствовал на защите Дарбу, репортерами (ныне оппонентами) были Аппель и Пуанкаре. Это исследование, которое в печатном виде занимает меньше 45 страниц, стало значительным событием в математическом анализе. Достаточно сказать, что в диссертации отчетливо просматриваются ростки последующих созданий Бореля, относящихся к теории аналитического и неаналитического продолжения, теории моногенности и мероморфных функций. Вместе с тем, это законченная работа, в которой в намеченных рамках доказательства доведены до конца. Некоторые доказательства, стоящие особняком к главной теме, диссертант поместил в виде приложения. Здесь впервые была установлена знаменитая лемма Бореля: если замкнутый промежуток $[a, b]$ покрыт бесконечной системой $\Sigma = \{\sigma\}$ открытых промежутков $\sigma = (\alpha, \beta)$, то из нее

можно выделить конечную подсистему $\Sigma_1=\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m\}$, также покрывающую весь промежуток.

Борель приводит доказательство этой леммы, основанное на применении трансфинитных чисел. В дальнейшем в своей книге [34], где снова излагается материал диссертации, он дает доказательство леммы, не прибегая к трансфинитным числам, предполагая, как и ранее, что $\Sigma=\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots\}$ — счетная система. Вскоре Лебег доказал ее справедливость и без последнего предположения. Со временем лемма Бореля стала одним из самых распространенных инструментов анализа. Ее роли Гильдебрант посвятил специальное исследование,* однако здесь отметим лишь, что с ее помощью доказываются три важнейшие теоремы о непрерывных функциях: 1) теорема Больцано-Коши: непрерывная функция, вместе с двумя своими значениями, принимает любое, промежуточное между ними; 2) теорема Вейерштрасса: непрерывная функция на замкнутом промежутке ограничена сверху и снизу; 3) теорема Кантора: непрерывная функция равномерно непрерывна на этом промежутке. Вообще, лемма Бореля используется особенно часто, когда, как в последней теореме, локальное свойство функции требуется распространить на весь промежуток.

Все это переносится на функции любого числа переменных, ибо лемма справедлива и в n-мерном пространстве. Многомерные обобщения леммы и различные ее модификации были впервые получены Борелем в его важных исследованиях по теоретической арифметике [75]. Наконец, как показал впоследствии Фреше, лемма Бореля заменой замкнутого интервала компактным множеством справедлива в произвольном метрическом пространстве; соответственно справедливы вытекающие из нее теоремы (например, о равномерной непрерывности).

Заметим еще, что как вспомогательное предложение данная лемма встречалась и ранее (у Вейерштрасса, Гейне), но именно Борель дал строгое ее доказательство, обобщил ее, выделил в самостоятельное предложение, показав ее роль в анализе и в основанной им с Лебегом теории меры.

Аналитические функции. В 1897 г. Борель возвращается в Париж и с этого времени уже навсегда становится

---

* *Hildebrandt T. H.* The Borel theorem and its applications. — Bull. Amer. Mathem. Soc., 1926, 32, 423—474.

парижанином. Впрочем, как и в Лилле, он неизменно сохраняет связь со своим родным Авейроном и по мере роста своего влияния продолжает оказывать неизменную помощь своим землякам. Начинается наиболее значительный период научной деятельности Бореля, в котором центральное место занимают проблемы теории аналитических функций и их обобщений. Как утверждал Борель, существенное влияние на выбор главного направления его исследований оказал Шарль Эрмит. В бытность Бореля студентом Эколь Нормаль Эрмит уже был в отставке, и лишь иногда в здании Академии наук и аудиториях университета можно было видеть его красивую голову с выразительными серыми глазами и шапкой серебряных волос. Как один из ведущих учеников Коши и человек, которого Пуанкаре называл своим учителем, Эрмит был окружен ореолом особой славы. Многие его работы по анализу, теоретической арифметике стали классическими. Еще студентом Борель изучал литографированный курс Эрмита по теории модулярных функций, и именно эта книга натолкнула Бореля на его идеи в теории моногенности.

К концу минувшего века теория функций комплексного переменного уже представляла собой обширную дисциплину. Оформились и получили дальнейшее развитие три ее направления, которым наука обязана Коши (вопросы, связанные с интегральными теоремами), Риману (изучение вещественной и мнимой частей функции) и Вейерштрассу (степенной ряд как элемент функции; ее аналитическое продолжение). Взаимоотношение этих подходов оказалось связанным с рядом тонких и глубоких теорем, а аналогии с простейшими фактами, относящимися к полиномам и дробно-рациональным функциям, привели к теории целых и мероморфных функций. К последним относится теория эллиптических функций — одно из самых модных направлений анализа прошлого столетия. Чарующая красота теории функций комплексного переменного, мощь ее методов привлекали все новых и новых исследователей. Достижения Бореля связаны прежде всего с этой дисциплиной. Подробно об этом, насколько возможно в книге данного типа, будет сказано ниже, а сейчас ограничимся небольшим обзором, который поможет понять дальнейшее (все величины здесь и ниже комплексные).

1) Функция $w=f(z)$ называется моногенной в точке z_0, если существует производная

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z},$$

причем этот предел не зависит от того, каким образом $\Delta z \to 0$.

Функция f называется аналитической в области D, если она моногенна в каждой точке этой области.* Напомним, что областью (открытым множеством) называется такое множество точек, что вместе с каждой точкой z_0 этому множеству принадлежит и некоторая ее окрестность (кружок с центром в z_0). Пусть область D является частью некоторой большей области D_1 и f и f_1 — функции, аналитические, соответственно, в D и D_1. Если в области D они совпадают ($f=f_1$), то f_1 есть аналитическое продолжение f из D в D_1.

Вейерштрасс показал, как с помощью степенных рядов можно эффективно осуществить аналитическое продолжение функции. При этом он исходил из того, что функция, аналитическая в D, имеет в каждой точке $z_0 \in D$ производные всех порядков и может быть разложена в ряд Тейлора:

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0) f'(z_0) + \frac{(z - z_0)^2}{2!} f'(z_0) + \ldots,$$

сходящийся в некотором круге с центром в z_0, лежащем в D.

Аналитические функции обладают многими замечательными свойствами. Важным шагом в развитии теории функций на рубеже XIX—XX вв. явилось обнаружение и обоснование Борелем того факта, что эти свойства вытекают из одного лишь условия — моногенности. Точнее, Борель показал, что существуют множества C, более общие, чем области «множества Коши», при этом для функций, моногенных в C, выполняется большинство основных свойств аналитических функций.

2) При переходе от полинома

$$P(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n$$

к степенному ряду

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots \tag{1}$$

прежде всего возникает понятие круга сходимости этого ряда. Для его радиуса R возможны три случая: а) $R=\infty$, б) $0 < R < \infty$, в) $R=0$.

* По всем вопросам теории аналитических функций см., например, [8, 12].

а) В первом случае, когда ряд сходится при всех z, имеем целую функцию. Возможность записи любого полинома в виде

$$P(z) = P(0)\left(1 - \frac{z}{z_1}\right)\left(1 - \frac{z}{z_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{z}{z_n}\right),$$

где $z_1, \ldots, z_n$ — его нули (корни), естественно ставит вопрос об аналогичной записи целой функции, которая может иметь и счетное множество нулей.

Простейшая из подобных формул

$$\sin \pi z = \pi z \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

была известна еще Эйлеру, а общий результат выражается знаменитой теоремой Вейерштрасса (примерно 1860 г.). В дальнейшем развитии теории целых функций в XIX в. большую роль сыграли работы французских математиков Лагерра, Пикара, Пуанкаре, Адамара и Бореля. В частности, Борель ввел очень полезное понятие порядка ρ целой функции. Оказалось, что именно на функции конечного порядка, $\rho < \infty$, переносится ряд свойств полиномов. Все они имеют порядок, равный нулю, а важнейшие функции $\cos z$, $\sin z$, e^z — порядок, равный единице.

б) Согласно основной теореме алгебры, для любого полинома $P(z)$ и любого λ уравнение $P(z) = \lambda$ имеет корень. Иными словами, полином может принимать любые значения. Аналогичный вопрос для целых функций решается теоремой Пикара: целая функция, не являющаяся многочленом, принимает бесконечное число раз каждое значение, за исключением, возможно, одного.

Функция, задаваемая рядом с конечным радиусом сходимости, всегда имеет особую точку на его границе — на окружности сходимости.
Так,

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots$$

имеет особую точку $z=1$ на окружности $|z|=1$.

Функции, имеющие только особенности вида $(z-c)^{-m}$ (m — натуральное число), называются мероморфными.

Простейшие такие функции задаются в виде несократимой дроби:

$$R(z)=\frac{P(z)}{Q(z)},$$

где P и Q — полиномы. В общем случае мероморфные функции задаются в виде отношения двух целых функций:

$$f(z)=\frac{a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots}{b_0+b_1z+b_2z^2+\ldots}=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)};$$

и их особенности суть нули знаменателя $\psi(z)$. Возможность разложения рациональной дроби на сумму простых дробей

$$\sum_1^n \frac{A_k}{z-a_k}$$

(для сокращения записи предполагаем, что знаменатель не имеет кратных нулей) ставит вопрос об аналогичном разложении мероморфной функции, имеющей бесконечное множество полюсов. Простейшая из этих формул:

$$\pi \operatorname{ctg} \pi z=\pi\frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}=\frac{1}{z}+\sum_1^\infty\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{z+n}\right)$$

была известна еще Коши. Общее решение проблемы было дано Миттаг-Леффлером в 80-х годах прошлого века. Последующее развитие теории мероморфных функций в XIX в. связано с его именем, а также с именем Пикара, Пуанкаре, Рунге, Адамара, Бореля.

Нули целой функции $f(z)$ не могут иметь точки сгущения на конечном расстоянии. Иными словами, при соответствующей их нумерации $|z_1|<|z_2|<\ldots$, $\lim\limits_n |z_n|=\infty$. В отличие от этого, полюсы функции могут быть расположены произвольным образом. На этом было основано одно важное наблюдение Пуанкаре, которое поясним простым примером. На окружности $|z|=1$ рассмотрим точки с рациональными аргументами, т. е. точки $b=e^{i\varphi}$, для которых φ — рациональное число. Занумеруем их каким-либо образом $b_k=e^{i\varphi_k}$, $k=1, 2, \ldots$ и запишем функцию:

$$f(z)=\sum_1^\infty \frac{A_k}{z-b_k}. \qquad (2)$$

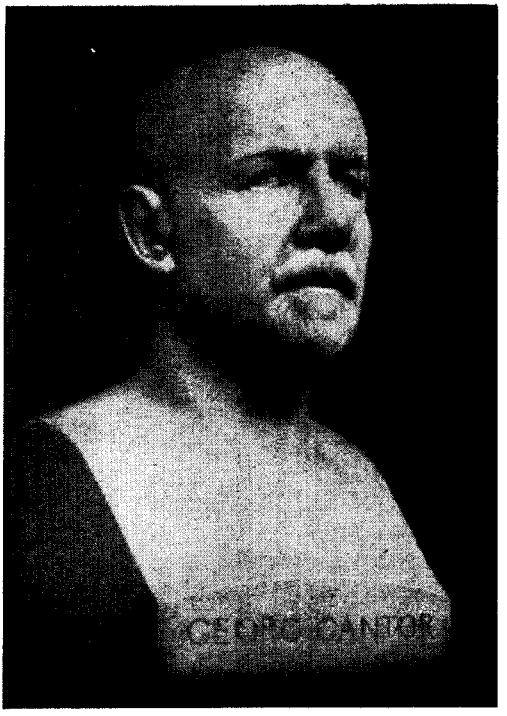
Если, например, выполняется условие $\sum_{1}^{\infty}|A_k|<\infty$, ряд (2) сходится при $|z|<1$. Функция (2) не имеет особенностей внутри круга $|z|<1$, но, так как точки b_k лежат всюду плотно на его границе, она не может быть продолжена за его пределы. Окружность сходимости является купюрой этой функции. С наличием купюр функций связаны исследования Бореля по функциям, моногенным по определению Коши.

Отметим еще, что названная выше теорема Пикара была распространена им и Борелем на мероморфные функции и что здесь также весьма существенным оказалось понятие порядка функции.

в) Случай, когда радиус сходимости ряда (1) равен нулю, тоже заслуживает внимания, ибо, как было замечено еще в прошлом веке, линейные дифференциальные уравнения очень простого вида имеют решения, выражающиеся рядами, расходящимися всюду, кроме точки 0. Эти ряды, однако, оказываются суммируемыми и могут быть использованы в приложениях: подходящие (линейные) преобразования их частных сумм приводят к сходящимся выражениям.

Во всех перечисленных направлениях Борелем были получены результаты принципиального значения. Теперь назовем те его мемуары, которые, как справедливо отметил де Бройль, выдвинули Бореля в число первых математиков мира; «О нулях целых функций» [29], «Мемуар о расходящихся рядах» [49], «Ряды полиномов и рациональные дроби» [57], «К теории мероморфных функций» [62]. Эти мемуары, которым обычно предшествовали предварительные заметки и статьи, в основном не перекрывались с рядом других публикаций Бореля по функциям комплексного переменного. Среди них были циклы работ по ряду Тейлора и аналитическому продолжению. В тот же период Борель написал ставший знаменитым мемуар по теории вероятностей [112] и ряд других работ.

Первая книга по анализу. Встреча с Георгом Кантором. Серия монографий по теории функций. Склонность Бореля к систематизации и его дидактические призвания побудили его задумать ряд книг, первая из которых «Теория функций» [34] вышла в 1898 г. Она оказалась одной из самых известных его книг и выдержала четыре издания, причем



Георг Кантор (1845—1918).

каждое сопровождалось новыми дополнениями. Первые три главы книги содержат основы канторовской теории множеств, в трех других главах, посвященных теории аналитических функций, Борель излагает преимущественно свои результаты, включая материал его диссертации, лемму о покрытиях, вопросы моногенности. Связь этой части книги с предыдущей частью показывает, что молодой ученый сознавал роль теоретико-множественного подхода к комплексному анализу.

Замечательное здание теории множеств, воздвигнутое Кантором, тогда еще, в сущности, стояло особняком от приложений, хотя теоретико-множественные построения уже встречались у Вейерштрасса, Пуанкаре и во многом у Римана.

Как известно, работы Кантора вследствие консервативного противодействия его влиятельного соотечественника Кронкера долго не получали признания в Германии. По инициативе Эрмита, оценившего по достоинству новизну и богатство идей Кантора, его сочинения были переведены на французский язык (одним из переводчиков был Пуанкаре) и опубликованы в 1883 г. во втором томе основанного Миттаг-Леффлером журнала «Акта математика». Борель познакомился с ними еще будучи слушателем Эколь Нормаль: «Я был в высшей степени пленен в 20-ти летнем возрасте трудами Кантора, с которым я имел счастье встретиться несколькими годами позднее, во время конгресса в Цюрихе. Георг Кантор привнес в математику дух романтики. . .» [34, с. 103]. В этой же книге Борель рассказывает о некоторых подробностях состоявшейся тогда его беседы с Кантором, в которой шла речь о вопросах эквивалентности множеств.

Пусть A и B — два произвольных множества и $A_1 \subset A$, $B_1 \subset B$ — соответственно, два их подмножества, $\sim$ — знак эквивалентности. Возможны следующие случаи:

1) существует $A_1 \sim B$, но не существует $B_1 \sim A$;
2) не существует $A_1 \sim B$, но существует $B_1 \sim A$;
3) существует $A_1 \sim B$, а также $B_1 \sim A$;
4) не существует $A_1 \sim B$ и не существует $B_1 \sim A$.

В случае 1) мощность A больше мощности B. Случай 2) сводится к 1) перестановкой A и B. В случае 3) имеет место $A \sim B$ (теорема Кантора—Бернштейна). Что можно сказать в случае 4)? Верно ли, что при этом также $A \sim B$? Это обстоятельство очень существенно, так как в случае положительного ответа для 4) он будет означать вместе с предыдущим, что любые два множества имеют либо одинаковую мощность, либо мощность одного из них больше мощности другого. Пытаясь разобраться в вопросе 4), Борель пришел к выводу, что отрицательный характер его формулировки требует привлечения понятий, дополнительных к тому, что мы называем множеством.

«Такова была проблема, занимавшая меня с разных точек зрения, ответ на которую я тщетно искал в работах Кантора, и я, имея честь встретиться с ним на конгрессе в Цюрихе (август 1897), обратился к нему по этому поводу. Относительно случая 3) Кантор любезно сообщил мне доказательство этой теоремы, полученное Феликсом Бернштейном и доложенное им на семинаре Кантора

в Галле. Применительно к случаю 4) Кантор сказал мне, что он давно склоняется к тому, что ответ здесь также положительный ($A \sim B$). Я привожу в тексте соображения, по которым я не могу разделить его точку зрения. Да будет мне позволено здесь принести мою благодарность Георгу Кантору за нашу беседу и сообщенное мне доказательство (случай 3). . .» [34, с. 104].

Борель считал соображения относительно случая 4) не конструктивными. Впоследствии (после 1904 г.) его требования к конструктивному подходу при построении арифметики и анализа вылились в систему взглядов, связанных, в частности, с его отрицательным отношением к аксиоме выбора Цермело и ее следствиям (см. главу «Множества, мера, интеграл»).

Вслед за «Теорией функций» [34] одна за другой появляются другие книги Бореля: «Целые функции» [49], «Расходящиеся ряды» [56], «Ряды с положительными членами» [66], «Мероморфные функции» [70], «Функции вещественной переменной и ряды полиномов» [87], «Теория роста функций» [117]. Этим самым было положено начало серии монографий по теории функций, ставшей общепризнанным событием в математической литературе. В то же время во Франции существовала традиция, восходящая еще к Коши, писать обширные трактаты по математическому анализу в широком смысле слова, включая геометрические приложения, дифференциальные уравнения, теорию аналитических функций. Этой традиции отдали дань Эрмит, Жордан, Пикар, Адамар, Гурса и другие. В их курсах, начинавшихся с самых элементарных понятий, содержались и разделы, по своей научной значимости находившиеся на переднем крае науки того времени, в том числе подчас и оригинальные результаты самих авторов.

В связи с французскими трактатами по анализу и книгами Бореля здесь уместно привести отрывок из воспоминаний такого математика, как Литлвуд, о путях его математического образования: «Приобретая каким-то образом определенные сведения из математического анализа, я еще никогда не изучал серьезно ни одного „Cours d'Analyse“. Другие математики неоднократно отмечали, что впервые они поняли, что такое настоящая математика, только, читая Жордана; я это упустил. Но я вообще был в своих занятиях весьма несистематичен; Пикар несо-

мненно был бы очень полезен для меня. Все это я помню весьма смутно и, вероятно, я уже давно забыл многое из того, что было прочитано. За несколько недель до экзамена, в третьем семестре, мне попались в руки ранние тома серии Бореля; они-то, в сущности, и оказались первыми книгами, по настоящему взволновавшими меня; ряды с положительными членами, расходящиеся ряды и том, посвященный целым функциям, . . .теперь я уже знал, что мне нужно».*

Хотя Борель прямо по этому поводу, по-видимому, и не высказывался, задумав свою серию книг, он несомненно считал, что традиция всеобъемлющих книг по анализу к началу века уже в значительной мере себя изжила, что создание трактата по теории функций, подобного «Теории поверхностей» Дарбу, одному человеку не под силу. И он стремится сделать свое начинание коллективным делом, привлекая не только французских, но и иностранных математиков. Наряду с книгами Бореля, Лебега, Бэра, в борелевской серии вскоре появляются книги Линделёфа (Стокгольм), Вольтерры (Рим), Ф. Рисса (Будапешт), Блюменталя (Берлин), Неванлинны (Хельсинки), Карлемана (Копенгаген), Лузина (Москва), Серпинского (Варшава). . . Всего при жизни Бореля вышло 50 книг этой серии, 10 из которых были написаны им самим. Все это были оригинальные сочинения, в которых создатели новых направлений и теорий анализа излагали материал подчас буквально по горячим следам своих открытий. Вместе с тем соблюдался принцип замкнутости и доступности изложения, что подчеркивалось общим для всех книг названием «Leçons sur. . .» («Лекции по. . .»).

Часто книги составлялись по материалам лекций автора под его руководством, а затем оформлялись для печати кем-либо из его сотрудников. Борель не только всегда оговаривал это в предисловии, но и заботился, чтобы на титульном листе рядом с именем автора фигурировало и имя младшего коллеги.

Борель писал в характерном для французских математиков свободном стиле: подробно, с примерами, без сквозной нумерации определений и теорем (а часто и вовсе

---

* *Литлвуд Дж.* Математическая смесь. Перевод с англ. В. И. Левина. М., 1973, с. 79.

без нумерации), не прибегая к леммам даже при длинных доказательствах. В книгах по аналитической механике и теоретической физике этот стиль в сущности сохранился и до наших дней, но в математике, когда еще продолжали выходить книги борелевской серии, он стал вытесняться тем компактным стилем сегодняшнего дня, который начал культивировать в Германии Эдмунд Ландау и который Годфрей Харди в Англии со своими коллегами довел до совершенства. Сочетание этого стиля с тем уровнем абстракции, который в наши дни встречается, например, в книгах Бурбаки, все же не делает архаичной борелевскую серию; она и ныне сохраняет свое научное и педагогическое значение выдающегося явления в математической литературе.

Рассмотренный пятнадцатилетний период (1897—1912 гг.) является наиболее богатым результатами в творчестве Бореля. Как было подчеркнуто выше, в эти годы во Франции работало такое множество выдающихся математиков, какого столь богатая математическими традициями страна еще не знала ранее. Чтобы выдвинуться на этом фоне, требовались поистине особые достижения. Но именно так расценила Французская Академия наук работы Бореля, удостоив его самых высоких наград. В возрасте 27 лет Борель получает премию Академии по математическим наукам, в 1901 г. — премию Понселе, в 1904 г. — премию Вайана за работу [89], о которой говорилось выше, затем в 1905 г. — премию Пти Дармуа. Признание пришло к Борелю уже в 30-летнем возрасте, а в 1901 г. он вместе с Юмбером и Адамаром баллотируется во Французскую Академию наук по секции геометрии.

Литературная деятельность

Маргарита Аппель. Хотя эти выборы в Академию не были благоприятными для Бореля, 1901 г. был для него счастливым в другом отношении. Как свидетельствует Фреше, Борель мечтал выбрать себе подругу жизни, воспитанную в небогатой интеллектуальной среде, которая научила бы ее понимать и ценить те же моральные качества, которые ценил и он сам. Свой идеал он нашел самым счастливым образом. В доме своего учителя и старшего

коллеги Поля Аппеля Борель встретил девушку, очаровавшую его своим живым умом и обаянием. Эта была старшая дочь Аппеля — Маргарита. Можно думать, что привлекательная внешность и яркий интеллект молодого профессора Эколь Нормаль привлекли также и ее внимание. Желание Бореля назвать Маргариту своей подругой жизни неожиданно натолкнулось на препятствие: оказалось, что его избраннице всего лишь 16 лет. Вскоре, однако, он решился сделать ей предложение, которое было принято.

В брачном союзе Эмиля и Маргариты Борель удивительно гармонично соединились взаимно дополняющие таланты. Маргарита Борель через некоторое время стала известна как автор ряда психологических романов, которые она издавала под псевдонимом Камилла Марбо. В течение ряда лет она была также влиятельным председателем общества литераторов. Как заметил Поль Монтель: «У их очага гармонично соединились два ума, искавшие различных радостей в мышлении и оба пользовавшиеся одним из самых ценных человеческих качеств: воображением. Видимо, их взаимное влияние друг на друга придавало ее романам и строгость в изложении психологического анализа и последовательности событий, а его научным работам — элемент фантазии и образность» [Л. 1, с. 847]. Понимая условность приведенного высказывания Монтеля, есть все основания считать его в целом справедливым, если к тому же учесть несомненные литературные способности Бореля, а также то обстоятельство, что его научная публицистика носила подлинно творческий характер.

В доме четы Борель постоянно бывали выдающиеся представители разных направлений французской интеллигенции — литераторы, художники, ученые. В частности, Борель и его жена постоянно принимали у себя и проводили часть лета с историком Сейнобо, у которого они в свою очередь имели возможность видеть ведущих политических деятелей, дипломатов и журналистов.

Со слов Маргариты Борель Фреше писал: «Шарль Сейнобо, как и Эмиль, обожал новые идеи, но не допускал бесполезного многословия; их девизом было: „Не надо напрасно усердствовать, но не надо условных политесов, не надо лишних речей“. Эмиль многим обязан этой среде и ее климату. Он не колебался жертвовать частью своего

времени, предназначенного для научных исследований, когда устанавливал связи с кем-либо из выдающихся людей, представляющих для него интерес. Так, он в течение многих лет завтракал тет а тет с Полем Валери в „Мезон де икс“, чтобы беседовать о науке „без светских людей и без женщин“, как шутил Валери» [Л. 5, с. 13].

Борель и Поль Валери. Чем же привлекал Бореля Валери, если не говорить о замечательном поэтическом даре последнего? Ответ на это в какой-то степени может дать статья Бореля «Поль Валери и научный метод» [217]. Она появилась в тот момент, когда творческий опыт и пришедшая за ним слава уже давно стали достоянием обоих. Вот несколько фрагментов из этой статьи: «Если бы Поль Валери родился на несколько веков раньше, он несомненно был бы одним из тех редких гениев, научные открытия которых стали такими же знаменитыми, как и их литературные и философские сочинения. Но он явился слишком поздно — в век, когда прогресс науки достиг такой степени, что новые открытия могут быть достигнуты теми, кто на них способен лишь ценой долгих и настойчивых усилий. Тот, кто не посвящает бо́льшую часть своей жизни подобным усилиям, может лишь в исключительных случаях быть открывателем в науке; но остается еще возможность радоваться новым идеям своего времени и выражать их собственным языком. Поль Валери познал эту радость, быть может, глубже, чем кто-либо из наших современников. . . В его эссе „Эпалинос“ («Eupalinos») в лице персонажа — тень Сократа — он изображает философа, который высказывается по вопросам как науки, так и эстетики: искусство геометра состоит в том, чтобы с помощью немногих слов и символов дать достаточно адекватное изображение физических и механических явлений; искусство литератора состоит в том, чтобы с помощью нескольких слов выразить возвышенную, рафинированную идею. Если большой писатель является одновременно геометром, если он сведущ в науке, он в нескольких словах, четких как отпечаток медали, сумеет охватить и выразить существо той или иной научной теории. И он даст своему слушателю эстетическую радость, поистине несравненную, приобщая его к своему ви́дению мира, ви́дению художника и поэта, и в то же время ученого.

У Поля Валери можно встретить замечательные примеры его умения резюмировать существо научной теории или в нескольких словах выразить свое отношение к той или иной научной школе или научной доктрине. . . Но, более того, в самих художественных творениях Валери сосредоточена логика научного метода, проявляющаяся как в нюансах, так и в их композициях в целом. . .

Ученый решает проблемы, которые ему заданы или которые он ставит себе сам. Поль Валери, пишет ли он в прозе или в стихах, также решает проблемы, и он получает такое же удовлетворение, как и ученый, в том, как он преодолевает стоящие перед ним трудности. Вот в каких благородных словах выражает он свою мысль об абсолютной поэзии: „Сердцевина нашего искусства требует от тех, кто посвятил себя ему, столь долгих и напряженных усилий, что они порой поглощают всю радость сознания собственной поэтичности, оставляя лишь гордость сознания постоянной неудовлетворенности. . .“» [304, 4, с. 2479].

Этот отрывок из статьи Бореля о Валери хотелось бы дополнить несколькими словами, относящимися к человеку, очень далекому от Валери и в то же время близкому ему по духу и творческим устремлениям. Это — замечательный американский поэт и прозаик Эдгар По. Быть может, этим будет найден и ключ к литературному вкусу Бореля — романтизм и логическое начало.

В своем произведении «Эврика», посвященном Александру Гумбольдту, По говорит: «Высшая гармония одаренного воображением интеллекта всегда наделена преимущественно математическим характером».*

Валери восхищался поэзией По и высоко ценил сюжетные построения ряда его новелл. Литературно-философское кредо По также было весьма близко идеям Валери.

Диалог «Апология игры». Эссе Бореля «Апология игры» [250], которое будет изложено ниже, написано в форме диалога. Оно достаточно интересно само по себе и в то же время проливает свет на некоторые черты характера Бореля. Участник диалога — математик Эвдокс, наряду с разумными утверждениями, высказывает и спорные,

---

* *Маттисен Ф. О.* Эдгар Аллен По. — В кн.: Литературная история США. Т. 1. «Прогресс», М., 1977, с. 383.

а то и явно неверные мысли (при всей своей учености он оказывается, например, политически неграмотным, когда говорит о социализме). Отношение Бореля к нему в некоторых местах явно ироническое.

Эвдокс — математик.

Арманд.

Арист — философ и экономист.

Эвдокс. Я хотел бы написать небольшую книгу «Апология игры», коренным образом отличающуюся от остальных моих сочинений, но прежде чем решиться на это, был бы рад узнать ваше мнение.

Арманд. Странный замысел! Я не отвергаю его, так как вы мне часто говорили, что игра вдохновила Паскаля на открытия по теории вероятностей, и этим самым зародилась новая наука, которая в своем дальнейшем сложном развитии сыграла роль в современной физике. Но не интерес к вопросу, бывшему предметом спора Паскаля и кавалера де Мере,* приводит сегодня наших современников в казино и заставляет их увлекаться бриджем.

Арист. Не заблуждайтесь, мой друг, Эвдокс лучше нас знает, насколько фатальным является разорение игроков, и он не имеет злого умысла подвергать их этому бедствию. Надо думать, его «Апология игры» предназначена для читателей, которых отпугнуло бы более ученое название. Он напомнит читателю то, что говорили Бертран, Пуанкаре и другие: разорение игрока не только неминуемо, но и быстро, и его можно наверняка предвидеть. Но пусть он не вводит себя в заблуждение, — если книга и привлечет внимание некоторых заядлых игроков, то едва ли это их остановит, ведь страсть глуха к голосу разума.

(При безобидных играх, например, двух лиц, скажем, при игре в орлянку, более или менее близкая к достоверности вероятность разорения одного из игроков достигается при необычайно большом числе партий. Иное дело для игр, культивируемых в казино. Содержатели игорных домов для поддержания своих предприятий, прибылей удерживают определенный процент ставок, что де-

---

* По поводу спора Паскаля и де Мере см., например, перевод книги [292]: *Борель Э.* Вероятность и достоверность. М., 1961, с. 18—20.

лается либо непосредственно (банкометом в баккара), либо в соответствии с правилами игры (нуль рулетки). И то и другое быстро ускоряет процесс разорения игрока, делает его к тому же практически абсолютно достоверным [292, с. 26—28], — *Е. П.*).

Эвдокс. Разрешите мне заметить, друзья, что я не настолько наивен, как полагаешь ты, Арманд, и не настолько ловок, как думает Арист. Можно ли заподозрить того, кто хвалит французские вина в том, что он поощряет пьянство?

Надо ли отрицать, что тяга к игре существовала у всех народов и в разные времена. Это глубоко заложено в инстинкте человеческой натуры, это отголосок истории его жестокой борьбы за существование. И сейчас игрок в искусственной ситуации, предусмотренной системой подчас весьма содержательных правил, прилагая все свои способности интеллектуальные и физические и забывая обо всем, старается победить своего партнера-противника, который, быть может, является его другом. Строгое соблюдение правил — школа лояльности и дисциплины, а умение извлечь урок из поражения — хорошая школа жизни. . .

Арманд. В вашем, я бы сказал, лирическом описании игры вы обошли вопрос о денежной стороне — то, что так превалирует в азартных играх.

Эвдокс. Я не игнорирую это, но здесь прежде всего нужно коснуться профессиональных игроков — в бридж, покер, . . . ловко использующих свой опыт для надувательства своих партнеров или тех наивных жертв казино, которые ждут судьбы своих ставок — своей судьбы — вокруг рулеточных столов. Еще раз повторяю, игра должна быть развлечением, а не профессией. В этой связи я допускаю и игру на деньги, без излишних страстей, игру в пределах материальных возможностей партнеров. Умение оставаться при этом в разумных границах — хороший показатель морали и тоже урок дисциплины. Запретить игру из опасения потери соответствующего контроля все равно что, как я уже говорил, запретить вина из опасения пьянства.

Особенность цивилизованного общества в том и состоит, что его члены должны уметь сами себя сознательно и разумно ограничивать без того, чтобы всякий раз им диктовали свыше законы и нравы.

В силу этого можно допустить выигрыши—проигрыши в карточных играх, что, вопреки вашему мнению, может иметь положительное моральное значение.

Арист. Нет ли несправедливых санкций? Может ли случай вести и к несправедливым санкциям? С точки зрения морали нельзя прививать людям вкус к играм, в которых возможны несправедливые потери. Это несовместно с идеей социального прогресса вообще; и нужно ли, культивируя подобные игры, игнорировать это?

Эвдокс. Вы несколько вышли за пределы моих намерений. Но я отвечу вам, так как это, собственно, приведет меня ближе к цели.

Вы правы, что я отношусь снисходительно к играм, в которых допускаются маленькие денежные ставки. Увы, если в картах не везет, внимание и разум недостаточны для выигрыша. И это так, вообще, во всех азартных играх. Но можно с уверенностью сказать, что игра воспитывает в людях чувство риска. И можно спорить, хорошо это или плохо. По-моему это хорошо. Прогресс человечества во многом обязан риску людей. В надежде осуществить свои чаяния люди подчас многим рискуют — благополучием, покоем, здоровьем. . . Темперамент многих первопроходцев, изобретателей в определенном смысле сродни игрокам. Для них это своего рода единственная партия, проигрыш или выигрыш которой означает славу или катастрофу. Люди всегда восхищались теми, кто не боялся идти на риск.

Но вернемся непосредственно к соображениям Ариста: следует ли считать прогрессом исчезновение тенденции к риску или, наоборот, думать, что риск в разумной мере нужен, что он делает жизнь менее монотонной и менее механической. Я не отрицаю, что со стороны общества требования социального прогресса диктуют необходимость исключения несправедливых и жестких ситуаций риска, угрожающего людям.

Я аплодирую тем, кто всюду и везде борется с риском, которому подвергаются рабочие, с риском на транспорте. . .

Арист. Ваши соображения о теории риска занятны, но они могут стать опасными, если их принять всерьез. . . Важнейшие вопросы общественного прогресса связаны с производством, с экономикой. . .

Эвдокс. Сначала одно слово о ваших замечаниях относительно математических исследований азартных игр.

Они небесполезны, как это вам кажется. Как и те элементарные вопросы, которые возникли во времена Паскаля, математические проблемы, связанные с играми сегодня, приводят к открытиям, могущим иметь очень важное значение, подобно математическим теориям, связанным с абстрактными построениями, которые нашли затем важные применения. . . я должен обсудить ваши соображения против риска и вашу защиту бережливости. . . Мы с вами согласны, что прогресс человечества за последние столетия обязан развитию индустрии, которое было бы невозможно без фундаментальных наук. Без математики, физики, химии, биологии мы жили бы так же, как наши отдаленные предки.

Вернемся же к обсуждению взаимоотношений риска и бережливости. Прогресс техники и экономики привел к накоплению больших капиталов. Именно реализация накоплений во взаимоотношениях акционеров и тех, кто реализует их капиталы, преобразовала общество к той его форме, которую мы теперь имеем. Это осуществлялось с помощью финансовой техники, а она шла рядом с техникой в собственном смысле слова, чем и осуществился этот ускоренный процесс эволюции общества, который порой приводит в смятение тех из нас, кто не так молод.

Арист. Не думаете ли вы, что тенденция риска была бы более оправдана в социалистическом или коммунистическом обществе?

Эвдокс. Разумеется, нет; ведь эгалитаризм далек от того, чтобы всегда быть фактором прогресса; рано или поздно он создает в человеческом обществе нечто подобное биологическим популяциям типа сообщества пчел или муравьев. Физика учит нас, что среда не может эволюционировать, а значит, и жить без фактора некоторой неоднородности: абсолютная однородность означает молчание, смерть.

Арманд. Решительно, ваша «Апология игры» сочетание парадоксов и безнравственности.

Эвдокс. Я отказываюсь от того, чтобы написать «Апологию игры», ибо вижу, как трудно быть понятным даже своим друзьям. Обращаясь к широкой публике, я рискую быть уличенным со всех сторон: быть обвиненным одновременно как реакционер и социалист, математик с черствой душой и филантропический мечтатель, приверженец логики и парадоксов. Что еще?

Арист. Но не вы ли говорили, что нужно культивировать чувство риска?

Эвдокс. Этот аргумент меня задевает. Я, возможно, все-таки попробую написать мою «Апологию игры».

Журнал «Ревю дю муа» и его авторы. Борель о Пуанкаре. Дискуссии с Анри Бергсоном. Рисковал ли сам Борель, шел ли он когда-либо на серьезный риск? Да, шел. Трудно себе представить, что он как игрок мог тратить время на рулетку, карты или что-нибудь подобное. Но он несомненно понимал толк в азартных играх не только как математик, но и «изнутри». Без этого он едва ли написал бы столько статей об азартных играх и книгу о бридже, кстати сказать, заслужившую уважение такого строгого читателя, как английский математик Литлвуд. Главное же — Борель шел на риск совсем иного рода. Здесь прежде всего следует сказать о его журнале «Ревю дю муа». Получив в 1905 г. премию Пти Дармуа 10 000 франков (по тем временам сумма не малая), Борель решил употребить ее на основание нового во Франции литературно-философского научно-популярного журнала. Фреше назвал это предприятие риском. Это был риск, так как во Франции тогда выходили научно-философские журналы «Ревю филозофик» и «Ревю дю метафизик э мораль», в которых сотрудничали многие известные в то время философы и литераторы. Это был риск, ибо могли возникнуть финансовые трудности (и они, действительно, возникли в годы войны), это был риск, так как Борель сознавал, что новое начинание затруднит его деятельность как математика. Но Борель всегда осуществлял свои замыслы, и уже в следующем году первый номер журнала «Ревю дю муа» («Месячное обозрение») вышел в свет.

Журнал быстро завоевал популярность, и не только во Франции, чему способствовал высокий научный и литературный уровень публикуемых в нем статей, актуальность и разнообразие информации. «Многие в Англии знали оранжевые обложки выпусков „Ревю дю муа“, ждали их прибытия», — вспоминал Коллингвуд [Л. 4, с. 500].

Борель старался предоставить читателям возможность сопоставлять разные точки зрения, и некоторые статьи печатались в дискуссионном порядке. В журнале сотрудничали Мария Кюри, физики-теоретики Поль Ланжевен

и Жан Перрен (все трое — близкие друзья Маргариты и Эмиля Борель), многие видные математики и естествоиспытатели, литераторы, политические деятели разных направлений — социалист Леон Блюм, радикал-либерал Эдуар Эррио, молодой тогда марксист Жак Дюкло. . . Борель особенно дорожил участием в журнале Анри Пуанкаре. Вспоминая об этом через много лет, Борель рассказывал: «Передавая мне корректуру своей статьи для „Ревю дю муа“, Пуанкаре заметил: „Я вношу исправления только там, где полагаю, что могу быть неверно понятым читателем. Исправление типографических ошибок — дело редакции и издательства. Я не трачу времени на них даже тогда, когда их вижу“» [212, с. 54].

Пересказав эту мысль своими словами, Борель в статье о научном методе Пуанкаре [116], опубликованной в том же журнале, говорит, что Пуанкаре скорее завоеватель, нежели колонизатор, но его завоевания мирные, это завоевания разума. «Он не мечтатель, не идеолог и, можно сказать не боясь, что это будет звучать парадоксально, манера мышления Пуанкаре настолько активна, что она не оставляет пауз для размышлений. Именно это позволило Пуанкаре сделать в науке столько, сколько до него сделали в науке только Гаусс и Коши» [116, с. 361]. Слова «до него», надо полагать, подразумевают математику и аналитическую механику XIX в. Эта апология знаменитого ученого не мешала Борелю еще при жизни Пуанкаре выражать свое несогласие с ним по различным вопросам.

Так, в статье «Относительность пространства согласно Пуанкаре» [102] Борель возражает против следующего его высказывания: «Предположим, что за одну ночь размеры всех существующих предметов увеличатся в тысячу раз. Мир станет подобным самому себе в том смысле, в каком это понимается в школьной геометрии; только то, что имело длину в метрах, будет иметь длину, выражаемую столькими же километрами. Наше восприятие пространства таково, что всего этого мы ощутить не сможем» [102, с. 117].

Борель разъясняет, что эта мысль лишена смысла, поскольку Пуанкаре подразумевает реальный физический мир и приписывает ему несуществующую абсолютную систему координат и единицу масштаба.

Одним из самых популярных авторов, сотрудничавших

в борелевском Ревю, несомненно был Анри Бергсон — известный философ, человек огромной эрудиции, блестящий стилист и оратор. Вот что говорит Мечников об атмосфере, окружавшей лекции Бергсона: «. . .новая философия Бергсона заняла вполне первенствующее место в современной мысли. . . По мнению последователей французского философа, — говорит далее Мечников, — он должен быть поставлен в ряд с самыми великими философами всех стран и всех времен и признан единственным первостепенным философом Франции со времен Декарта и первым в Европе после Канта. . . Публика видит в его учении начало нового откровения и ломится в двери аудитории, в которой он читает лекции в Коллеж де Франс. . . Бергсон убежден в существовании души независимой от мозга, хотя и находящейся с ним в известном соотношении. . . Я спрашивал нескольких лиц из числа посетителей этого курса метафизики, достаточно ли они понимают содержание лекции. Все, без исключения, признались, что нет. . .».*

Интуицию, играющую в концепции Бергсона важную роль, как мистический акт непосредственного постижения действительности, противоположный разуму, великий биолог и медик критиковал с позиции метериалиста-естествоиспытателя. Имея в виду известный рассказ Пуанкаре о том, как он открыл автоморфные функции в момент, когда, по его выражению, он совершенно к этому не был подготовлен, Мечников замечает: «Зависимость интуиции от материи не подлежит сомнению. В примере Пуанкаре мы видим влияние возбуждающего напитка (черного кофе) на побуждение творчества. Бергсон ссылается на музыкальную композицию, как на высшее свободное проявление творческого взмаха (Elan vitale). Но и в музыке нельзя не видеть материальных факторов. . .».**

Тогда же с Бергсоном полемизировал и Борель и, что интересно, также по вопросам интуиции. Но их дискуссия шла совсем в ином направлении. В статье «Эволюция и геометрическое сознание» [101] Борель критикует утверждение Бергсона об абсолютно превалирующей роли интуиции в геометрии. А поскольку уровень интуиции

---

* *Мечников И. И.* Сорок лет искания рационального мировоззрения. Научное слово, М., 1913, с. 13—19.

** Там же, с. 17.

как биологического (у Бергсона фактически метафизического) фактора у древних греков и у людей наших дней один и тот же, Бергсон фактически игнорирует поступательный процесс развития геометрии, оставаясь в своих рассуждениях в пределах «Начал» Эвклида. Главное, подчеркивает Борель, это то, что интуиция и логика все время и последовательно шли рядом. Оба эти фактора непременно присутствовали в творчестве геометров, хотя у тех или иных играли разную роль. После длинной цитаты из Миттаг-Леффлера, не совсем, как мне кажется, убедительно на конкретных примерах делящего математиков на более поэтичных и менее поэтичных в их творчестве (здесь интуиция подменяется поэтичностью), Борель, возвращаясь к приведенным высказываниям Бергсона, замечает по поводу «Начал» Эвклида: «Они представляют интерес только для истории науки, интерес которой я признаю; но следует различать историческую важность и важность актуальную: в наших музеях мы сохраняем рыцарские доспехи, но наш военный министр не станет их надевать на солдат» [101, с. 750].

Относительно работы [101] Бергсон утверждает, что Борель его не понял, что произошла путаница вопросов философских и геометрических. В «Ответе Бергсону» [104] Борель заметил, что речь шла о науке, а наука в своем развитии должна иметь завоеванные этапы. «Наша жизнь, — говорит он, — слишком коротка для того, чтобы всякий раз возвращаться к исходным пунктам человеческого мышления» [104, с. 245].

Бергсон и Борель встречались также в стенах факультета наук Парижского университета, где первый систематически читал различные философские дисциплины, пропагандируя свои идеи, а второй в 1909 г. возглавил только что открывшуюся кафедру теории функций. Однако уже через два года, не покидая кафедру, Борелю суждено было снова вернуться в Эколь Нормаль в связи с неожиданной кончиной ее директора Жюля Таннри. Министерство просвещения предложило Борелю стать преемником его учителя, и он, несмотря на крайнюю загруженность, согласился. «Это было тяжелым решением, — говорит Фреше, — и можно подумать, что он с сожалением тратил таким образом время, предназначенное для его собственных блестящих научных исследований. Но это не так. Борель высказывался о своем назначении в Эколь Нормаль как

о самой большой чести, которая когда-либо выпадала на его долю. И он заявил даже, что четыре года перед войной 1914 г. (когда он оказывал моральную и материальную помощь своим ученикам, проявлял заботу об их успехах) были самыми счастливыми в его жизни» [Л. 5, с. 7].

Эти же предвоенные годы были счастливыми и для Маргариты Борель. Значительно возросло литературное мастерство и популярность писательницы. Ее романы выходили, как уже упоминалось, под псевдонимом «Камилла Марбо». Один из них «Статуя под вуалью» в 1913 г. был удостоин национальной премии «Фемина».*

Чета Борель вместе с усыновленным ими рано осиротевшим племянником Бореля Фернаном Лебо (своих детей супруги не имели) переселяется из квартиры на бульваре Арго в резиденцию директора Эколь Нормаль. Уже в этом амплуа Борель задумывает новое мероприятие — серию популярных книг «Новая научная коллекция». Первая из них «Авиация», написанная Борелем совместно с Пенлеве, вышла в 1910 г. Борель был одним из самых активных авторов этой серии, написав для нее ряд увлекательных книг.

В декабре 1912 г. вместе с Гурса и Адамаром Борель вторично баллотируется в Академию наук Франции. Это были выборы особого рода. Речь шла о замещении места, которое занимал Пуанкаре, неожиданно скончавшийся от эмболии в июле того же года. Предпочтение было отдано Адамару.

Война 1914—1918 и двадцать лет спустя

> «Когда Франция обнажает меч, все противоречивые страсти сливаются воедино. Из массы индивидуумов Франция превращается в единый всесокрушающий порыв».
>
> Шарль де Голль

Тяжелые испытания. В один из зимних дней 1914 г. Борель принес своему приемному сыну Фернану сигналь-

* Dictionnaire de la Litterature Francaise contemporaine. Paris, Larousse, 1966.

ный экземпляр своей новой книги «Геометрическое введение в некоторые физические теории» [154]. Фернан был студентом Эколь Нормаль и мечтал стать физиком-теоретиком. Этому не суждено было сбыться. . .

Германия, втянувшая в свою орбиту мозаичную Австро-Венгрию, а затем и Оттоманскую империю, рвалась к переделу мира. Известно, что в то время очень многие во Франции легкомысленно подталкивали наступление трагических событий. «Война — это ужасно, но без войны все-таки скучно». Эти дикие слова из времен Людовика XIV с добавлением фразы: «Уже сто лет после Наполеона мы не имеем ни одной победы в Европе» часто тогда звучали на французском языке.

В самой стране и за ее пределами народ хотел совсем другого, но ураган неумолимо приближался. Уже в июле дивизии Мольтке, растоптав Бельгию, повернули на юг, к Парижу.

Опустели аудитории Эколь Нормаль; вместе с первыми тысячами своих соотечественников ушли на войну нормалисты. Среди них был и Фернан, сам просившийся на фронт. В уже цитированной речи памяти Бореля де Бройль говорил: «В период этого великого катаклизма, мрачное воспоминание о котором сохранилось в памяти всех, кто его пережил, наш коллега по Академии принимал активное, смелое и действенное участие в огромной работе по национальной обороне. Как руководитель научных исследований Эколь Нормаль он с горечью видел, что смерть трагически опустошает ряды его учеников, которых он узнал и полюбил и которым прочил большое будущее; ему самому пришлось пережить личное горе, которое причинила ему гибель его дорогого племянника, одного из студентов Эколь Нормаль, Фернана Лебо, ставшего его приемным сыном. Но он был человеком, способным мужественно преодолеть свое горе и мужественно выполнять свои обязанности. В то время, как мадам Борель самоотверженно ухаживала за ранеными, находившимися на излечении в госпитале Эколь Нормаль, Эмиль Борель делил свое время между фронтом, где он командовал артиллерийской батареей и проявил большое мужество перед лицом опасности, и исследованиями, которые он проводил для целей национальной обороны, особенно в рамках Службы изобретений, которая была создана Полем Пенлеве и основным организатором которой он был (Борель, —

Е. П.). Он внес значительный вклад в решение важных проблем, связанных с определением местонахождения батарей по звуку выстрелов, и различных артиллерийских проблем, например корректировки стрельбы, исследования влияния ветра на полет снаряда. Решение этих проблем во многом способствовало успехам нашего оружия» [Л. 3, с. 51].

Как ни многозначительны эти слова, но к ним необходимо добавить, что после гибели Фернана Борель настаивал на отправке его самого на фронт. «Я должен драться, я буду драться», — говорил он. И хотя фактическим командиром батареи, упоминаемой де Бройлем, был не Борель, а неизвестный нам офицер, Борель находился при ней, участвовал в боевых действиях.

Как он потом вспоминал, в теоретических разработках военного времени, сослуживших добрую службу отечественной артиллерии, вместе с ним в тесном контакте работали Лебег, Вейсс и Коттон. Все они были активными сотрудниками группы звуковой локации, основателем которой вместе с Пенлеве являлся итальянец Вольтерра.

Мир. Новые начинания. 1918 года, одиннадцатого месяца, одиннадцатого числа и, как говорят, в одиннадцать часов между англо-франко-американской коалицией, с одной стороны, и Германией и ее союзниками, с другой, было подписано Версальское соглашение, зафиксировавшее поражение последних в мировой войне. Все занятия Бореля в годы войны были почти исключительно подчинены оборонным делам. Об этом свидетельствует и пробел в хронологическом списке его публикаций. Исключение составляет лишь книга по моногенным функциям [162] — одна из самых глубоких книг Бореля, которую помог подготовить к печати по лекциям Бореля 1912—1914 гг. поправлявшийся после полученного на фронте ранения Гастон Жюлья, ставший вскоре одним из видных французских специалистов по аналитическим функциям. В 1919 г. в связи с кончиной Буссинеска в Парижском университете освободилась должность руководителя кафедры математической физики и теории вероятностей. Желание Бореля занять эту должность, в которой когда-то пребывали Ляме и Пуанкаре, было удовлетворено. Кстати, в Жюлья Борель нашел достойного преемника по заведыванию оставляемой им кафедры теории функций.

Переключение Бореля на руководство другой кафедрой было прежде всего обусловлено его педагогическими и научными интересами, связанными с теорией вероятностей, а также с многочисленными прикладными задачами вероятностного характера, которые все больше начинали его интересовать. «Как-то не верилось, — вспоминал Коллингвуд, — что Борель больше не читает в университете курсов, связанных с теорией функций. Но, когда я в начале 20-х годов имел возможность прослушать его лекции по теории вероятностей, мое разочарование сменилось чувством восхищения» [Л. 4, с. 501].

Одним из первых послевоенных мероприятий Бореля была реорганизация 1920 г. учебных программ и планов Эколь Нормаль, после чего он отказался от поста ее руководителя. Для Бореля, писал Коллингвуд, была невыносимой мысль, что в этих стенах учился его любимый Фернан и что его больше нет. Конечно, Борель сохранил любовь к школе, воспитанником которой он был и которой отдал столько сил. Поэтому он охотно принял предложение стать председателем ассоциации старых учеников (anciens élèves) Эколь Нормаль и пребывал в этой должности до конца жизни.

В том же 1920 г. Борель вместе с Пенлеве отправляется в самое длительное свое путешествие — в пятимесячную поездку по Китаю. По-видимому, одной из целей этой поездки для Пенлеве были политические тенденции, связанные с тогдашними намерениями Франции в Китае. Фреше, который впоследствии был слушателем рассказа Пенлеве об этом путешествии, сообщает такой эпизод. По пути поезда, в котором находились Пенлеве и Борель, происходило сражение двух воюющих китайских армий. Генералы, командовавшие этими армиями, узнав о том, кто следует в поезде, и приняв во внимание большую политическую роль и научное реноме Пенлеве, договорились о временном перемирии, чтобы дать возможность проехать ему и его спутникам [Л. 5, с. 19].

В Академии наук. В 1921 г. Борель избран в Академию наук вместо скончавшегося Юмбера. По мнению де Бройля, это явилось «несколько запоздалым» признанием. Однако можно привести примеры, когда многие блестящие французские ученые были избраны в Академию гораздо в более позднем возрасте или вовсе не были избраны.

Начинающийся новый период неутомимой деятельности Бореля был связан не столько с его новым амплуа, сколько с новой тематикой. В предисловии к своей книге 1922 г. «Проблемы и методы теории функций» [181] Борель говорит, что это его последняя книга по теории функций. В этом сочинении он в основном резюмирует некоторые свои предыдущие теоремы, отмечает их связь с результатами других авторов, формулирует ряд проблем теории меры, метрической теории функций и комплексного анализа. Между тем в борелевской серии выходят новые книги по проблемам теории функций. Их авторы — Карлеман, Данжуа, Неванлинна и в своих статьях столь же известный венгерский математик Пойя — отмечали основополагающее значение вклада Бореля. Выходят и новые, дополненные издания его прежних книг по теории функций [34, 49, 56, 87]. Но сам Борель уже сосредоточился на новых замыслах, и если говорить о литературе, это прежде всего фундаментальный трактат по теории вероятностей. Интерес Бореля к этой дисциплине восходит примерно к 1905 г. Впоследствии он увлекается ею все больше и больше.

В 1909 г. появляется небольшая, но содержательная книга Бореля «Элементы теории вероятностей» [111], переиздававшаяся и имевшая успех, затем также весьма популярная книга «Случай» [156] — многочисленные оригинальные статьи, заметки. Но замысел Бореля в 20-х годах простирается дальше. Как сообщает Фреше, поставленную себе задачу по созданию трактата Борель характеризовал так: «Координировать замечательное множество изысканий, сделанных в последние 50 лет по теории вероятностей и ее приложениям, мне представляется необходимой попыткой в стране Паскаля, Лапласа и Пуанкаре. Я отдам этой работе все силы, которыми буду располагать» [Л. 5, с. 21]. Со свойственной ему исключительной энергией Борель берется за осуществление этого мероприятия, которое, как и серия монографий по теории функций, стало коллективным начинанием. Борель в нем играл главную роль и как автор, и как организатор. Вначале появляются два выпуска, написанные Борелем в 1924 г. [209], [210], за ними вышли выпуски, написанные другими авторами, затем в заключение еще три выпуска Бореля [214, 253, 256], составившие 2—4-й выпуски второго тома трактата. Этим самым была создана своего рода энциклопедия све-

дений по теории вероятности, отвечающая той эпохе. Стремительное развитие теории вероятностей, начавшееся в конце 20-х годов и вызванное преимущественно работами русских и французских математиков, привело к тому, что в печать хлынул поток журнальных публикаций и выпуски борелевского «Трактата», несмотря на их богатое и разнообразное содержание, уже не могли соответствовать быстро меняющемуся уровню информации в этой области. В связи с этим Борель задумывает новую серию — «Коллекция монографий по теории вероятностей». Данью уважения коллег к Борелю было включение в нее таких этапных книг, как два тома Фреше «Современные теоретические изыскания по теории вероятностей» и сочинения П. Леви «Теория сложения случайных величин». Заключительную часть этой серии составила одна из книг Бореля по теории азартных игр [260].

Но как бы ни были широки литературно-научные замыслы Бореля, он не ограничивался только ими. Он задумывает и осуществляет издание серии книг «Библиотека научного образования», представляющей собой собрание научно-популярных произведений по различным дисциплинам. Некоторые из книг, вышедших в этой серии, носили довольно популярный характер, но были в ней и книги, написанные на высоком уровне, адресованные профессиональным математикам, физикам, механикам, биологам. Здесь также Борель проявил себя как активный автор, создавший такие книги, как «Пространство и время» [191], «Геометрия и мнимые величины» [234], которые и в наши дни можно читать с интересом. Помимо этого, Борель находил время для написания книг по элементарной математике. Он любил преподавание во всех его видах и часто присутствовал на экзаменах в высших военно-морских учебных заведениях Франции. С флотом его родной страны связана кульминация политической деятельности Бореля.

Борель и политика. В течение многих лет Борель активно участвовал в политической жизни Франции. В 1924 г. он был избран в парламент в качестве депутата от Авейрона и после переизбрания оставался парламентарием в общей сложности в течение 12 лет. Постоянная дружба с Полем Пенлеве способствовала политической деятельности Бореля в общенациональном масштабе, но первоначально в парламенте он представлял почти

Поль Пенлеве (1863—1933).

исключительно местные интересы. Любимый и ценимый своими земляками, Борель в 1926 г. был избран в генеральный совет Авейрона, а через год он становится мэром своего родного Аффрикана. За исключением периода пребывания у власти режима Петена, эти две должности Борель сохранил до самой смерти. Отмечалась его способность понимать сущность явлений, чуткость к нуждам простых людей. Постепенно он приобрел большое влияние. Так, Борель стал председателем государственной комиссии по делам Эльзаса и вице-президентом парламентского комитета по финансовым делам. Он был даже, правда недолго, морским министром в кабинете Пенлеве и в качестве такового принимал участие в длительном походе эскадры кораблей. Он поддерживал дружеские отношения с рядом морских офицеров разных званий, многих из которых знал как преподавателей и слушателей военных учебных заведений. На посту министра Борель добился присвоения некоторым военным судам имен ученых: «Архимед», «Паскаль», «Монж», «Понселе», «Френель», «Пастер», «Анри

Пуанкаре». Насколько можно судить, такой выбор определялся не только научными заслугами этих ученых, но и фактами их биографий. Как выразился Монтель: «Борель и на посту государственного деятеля оставался человеком, особенно преданным науке и носившим в своем сердце горячее желание ей служить» [Л. 1, с. 847].

Интересно отметить, что Борель не был членом социалистической партии, возглавляемой Пенлеве, вообще говоря социалистом правого толка. Он состоял в партии радикал-социалистов и именно от нее баллотировался в парламент. Руководитель этой партии Эррио, как известно, был весьма дальновидным, реалистически мыслящим политиком.

Авторитет Бореля выходил далеко за пределы академических кругов, и во время своего пребывания в парламенте он мог с удовлетворением констатировать осуществление ряда его начинаний, среди которых следует отметить основание Института Анри Пуанкаре.

К середине 20-х годов Франция, несмотря на ее выдающиеся научные, особенно математические, традиции, оказалась несколько в стороне от происходящего стремительного развития ряда основных направлений теоретической физики. В связи с этим Борель выдвинул идею создания научно-учебного центра, который осуществлял бы работу по исследованиям в области теоретической физики и теории вероятностей, а также готовил бы кадры исследователей в этих областях.

Идея эта была горячо поддержана Лонжевеном, де Бройлем и многими другими ведущими учеными Франции. Осенью 1928 г. под председательством тогдашнего президента Франции Раймона Пуанкаре состоялось открытие этого института, получившего с самого начала имя его великого кузена. Борель был первым директором Института Пуанкаре и в этой новой должности, как сообщает де Бройль, лично руководил исследованиями по прикладной теории вероятностей, подготовил в его стенах многих способных специалистов.

«Вторым крупным научным учреждением, в создании которого Борель принимал участие, был Национальный центр научных исследований — НЦНИ. Он весьма энергично поддержал своего друга Жана Перрена, когда тот взялся укрепить Национальный научный фонд, а затем

преобразовать его в НЦНИ. Всем известно, какое место занимает теперь последний в научной жизни Франции» [Л. 3, с. 81].

К задачам НЦНИ, начиная с 60-х годов, относится издание собраний трудов ряда выдающихся французских ученых. В этом издании вышли и сочинения Бореля [304].

Из вещественного анализа

Следующие две главы посвящены обзору работ Бореля по анализу. Начнем с мало известной теории роста функций, в которой Борелем, в частности, была сделана попытка широко использовать трансфинитные числа.

Теория роста функций. 1) Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — две возрастающие функции, определенные при $x > x_0 \geqslant 0$. Если

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f_2(x)}{f_1(x)} = \infty,$$

то говорят, что f_2 возрастает быстрее, чем f_1. Обозначим это $f_1 \prec f_2$ (соответственно, $f_2 \succ f_1$). В частности, $x \prec x^2 \prec \prec x^3 \prec \ldots$. Функция x^n имеет порядок роста n. При любом n имеет место $x^n \prec e^x$, но порядок роста e^x не может быть выражен натуральным или каким-нибудь другим конечным числом. Будем считать, что порядок e^x выражается трансфинитным числом ω.

Порядок роста $x^{1/n}$ равен $\frac{1}{n}$ и, поскольку для любого n $x^{1/n} \succ \ln x$, функции $\ln x$ приписывается порядок $\frac{1}{\omega} = \omega^{-1}$.

Оказывается, что порядок роста наиболее важных и чаще всего встречающихся возрастающих функций можно выразить определенным числом — обычным или трансфинитным, причем действиям над функциями отвечает соответствующая алгебра этих чисел. Порядок роста функции $f(x)$ обозначим $\theta(f)$.

Операция θ обладает следующими свойствами:

$$1^\circ\ \theta(f_1 f_2) = \theta(f_1) + \theta(f_2),$$
$$2^\circ\ \theta(f_1(f_2)) = \theta(f_1)\,\theta(f_2).$$

Для функции f_{-1}, обратной по отношению к f, имеет место равенство:

$$3^\circ\ \theta(f_{-1}) = (\theta(f))^{-1}.$$

Так как $f_1(f_2) \neq f_2(f_1)$, то умножение порядков вообще не коммутативно $\theta(f_1)\,\theta(f_2) \neq \theta(f_2)\,\theta(f_1)$, но оно ассоциативно:

$$4^\circ\ \theta(\varphi(f_3)) = \theta(f_1(f_2(f_3))),$$

где $\varphi = f_1(f_2)$.

Имеет место дистрибутивность справа: $(\theta_1 + \theta_2)\,\theta_3 = \theta_1\theta_3 + \theta_2\theta_3$, но дистрибутивность слева не выполняется. Прежде чем остановиться на возможности реализации этой алгебры, приведем теорему (Дюбуа-Реймон, 1871): для любой последовательности $f_1 \prec f_2 \prec \ldots$ существует такая функция f, что при всяком n $f \succ f_n$. Этой теореме и ее обобщениям Борель придавал очень большое значение; она встречается не только в его оригинальных работах, но и в ряде его сравнительно популярных книг, например в [285]. Поэтому стоит привести несколько слов о ее доказательстве.

Очевидно, любая функция f, выражаемая рядом $\sum_n a_n f_n(x)$ с положительными a_n, растет быстрее каждой f_n. Достаточно показать, что a_n можно выбрать таким, что этот ряд сходится при всех x. Последнее имеет место, если, например,

$$a_n^{-1} = f_1(1)\,f_2(2)\ldots f_n(n).$$

Эта идея принадлежит Харди.* Борель обычно приводит доказательство Дюбуа-Реймона, основанное на применении диагонального процесса.

Вернемся теперь к алгебре Бореля 1°—4°. Отправляясь от функции $x, x^2, \ldots, e^x$ и обратных им $\sqrt{x}, \sqrt[3]{x}, \ldots, \ln x$, мы получаем, например, такие равенства:

$$\theta(x^n e^x) = n + \omega = \omega + n,\quad \theta(e^{2x}) = \omega + \omega = 2\omega \neq \omega \times 2,$$
$$\theta(e^{x^2}) = \omega \times 2,\quad \theta(e^{e^x}) = \omega^2,\quad \theta(x^x) = \omega(1 + \omega^{-1}) \neq \omega + 1 = \theta(xe^x),$$
$$\theta(ax^n) = \omega^{-1}a\omega n,$$

что соответствует 1°—4°. Заметим еще, что бесконечно малым отвечает отрицательный порядок роста: $\theta(e^{-x}) = -\omega$ и т. д.

---

* *Hardy G. H.* Orders of infinity. Cambridge, 1924, с. 9.

Введем, следуя Харди, обозначение $f \asymp \varphi$, если

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f}{\varphi} = k, \quad 0 < k < \infty.$$

Одна из возможностей реализации борелевской алгебры 1°—4° дается следующей теоремой Харди. Обозначим через L (в честь Лиувилля) класс функций от x, определенных с помощью конечного числа операций $+$, $-$, x, $:$, $\sqrt[n]{}$, а также с помощью функций $e^{(\cdots)}$ и $\ln(\cdots)$.

Теорема Харди: * любая L-функция непрерывна, знакопостоянна, монотонна и при $x \to \infty$ стремится к ∞ или к конечному пределу, в частности к нулю. Для любых двух L-функций f_1 и f_2 имеет место одно из соотношений $f_1 \prec f_2$, $f_1 \asymp f_2$, $f_1 \succ f_2$. Этим самым для любого $f \in L$ в борелевской шкале роста определен трансфинитный порядок $\theta(f)$ того или иного знака.

2) Отсюда различные пути ведут к функциям, рост которых Борель назвал иррегулярным.

а) Борель определял, что функция f принадлежит классу (n) («n скобки»), если $f = x^{n+\varepsilon(x)}$, где $\lim\limits_{x \to \infty} \varepsilon(x) = 0$, $\varepsilon(x) > 0$, в остальном ε — произвольно. Борель расширяет свою θ-алгебру порядков заменой числа n символом (n). Он намечает доказательство того, что соотношения 1°—4° при этом остаются в силе.

б) Функциональные уравнения различных типов также приводят к функциям иррегулярного роста. Ограничимся одним интересным примером.

Пусть $f(f(x)) = e^x$. Можно показать, что функция, удовлетворяющая этому уравнению, существует, и она монотонна (а также непрерывна). Согласно 2°, она должна иметь порядок роста $\sqrt{\omega}$. Борель в теории роста не вводит дробных степеней от ω, однако позднее в работах по теории множеств нулевой меры он вводит подобные символы.

Еще Дюбуа-Реймон (1873 г.) рассматривал вопрос о соотношении порядка роста функции и ее производной, а также функции и ее интеграла. Используя приведенную выше свою трансфинитную символику, Борель идет в этом отношении дальше [117, гл. III]. Ценность этих соображений, однако, несколько снижается из-за отсутствия достаточно общих закономерностей и необходимости рассмотре-

* Там же, с. 17.

ния большого числа частных случаев. Более убедительно выглядят приведенные у Бореля результаты, относящиеся к целым функциям. О фундаментальном вкладе Бореля в теорию целых функций и функций, задаваемых рядами с конечным радиусом сходимости, будет сказано в следующей главе, носящей более специальный характер. Пока же ограничимся элементарными соображениями, относящимися к вещественной области.

Рассмотрим при вещественных x ряд

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \tag{1}$$

с положительными коэффициентами a_n. Пусть $\lim \sqrt[n]{a_n} = 0$ (в более общем случае $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} = 0$), тогда (1) сходится при всех x; $f(x)$ — целая функция. Обозначим $\sqrt[n]{a_n} = \varphi^{-1}(n)$. Что можно сказать о росте функции $f(x)$, если известен порядок роста $\varphi(n)$? Этот вопрос был поставлен Пуанкаре, и соответствующие первые шаги были сделаны еще в конце прошлого века его соотечественниками Адамаром, Борелем, ле Руа. Вот относящиеся к этому результаты Бореля [66, гл. V].

1) Если $\theta(\varphi(n)) = (\alpha)$, то $\theta(f(x)) = \omega \frac{(1)}{\alpha}$.

2) Пусть теперь интервал сходимости ряда (1) конечен; его можно считать равным единице. Предположив еще, что $x=1$ — особая точка функции $f(x)$, получим [66, там же] следующую таблицу соотношений роста a_n и $f(x)$:

Рост a_n, $n \to \infty$		$p-1$	ωk	$\omega\left(1-\frac{1}{\omega k}\right)$
Рост $f(x)$ относительно	$\left(\frac{1}{1-x}\right)$	p	$\omega\left(\frac{k}{k-1}\right)$	ω^{k+1} (1)

Отметим еще такую теорему Пуанкаре: какова бы ни была возрастающая функция φ, существует такая целая функция f, что $f \succ \varphi$. Остроумное доказательство, найденное Борелем, содержится в [66, с. 27], а также у Харди.*

Как это ни странно, в книге Бореля по теории роста функций [117] отсутствует его теорема о порядке роста функций — интегралов весьма общего класса нелинейных или дифференциальных уравнений.

---

* Там же, с. 10.

Пусть задано уравнение

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{2}$$

в котором f — полином от всех переменных. Борель высказал предположение, что любой вещественный интеграл этого уравнения имеет порядок роста, не превышающий ω^{n+1}.

Для $n=1$ ему удалось [41] найти вполне строгое (но не простое) доказательство этого факта: порядок роста любого непрерывного вещественного решения уравнения $f(x, y, y')=0$ не превышает ω^2. В общем случае проблема оказалась значительно более сложной. Данное Борелем для $n=2$ доказательство содержало некоторые пробелы.

Результат Бореля при $n=1$ был существенно улучшен рядом авторов (Линделёф, Бутру, Харди).

Другие вопросы. Творчество Бореля с ранних пор оказалось удивительным образом связанным с рядами, все члены которых положительны. Он посвятил им и интегралам от неотрицательных функций одну из своих первых книг [66]. Они встречаются у него в теоремах теории множеств нулевой меры, в теории моногенных функций, в теории вероятностей. Примечательно, что и в теории рядов с членами разных знаков Борелю принадлежит существенный результат, дополняющий знаменитую теорему Римана о перестановках членов неабсолютно сходящегося ряда.

Пусть задан ряд с членами разных знаков:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots, \tag{3}$$

неабсолютно сходящийся. Согласно Риману, для любого конечного или бесконечного B существует перестановка членов ряда (3), после которой его сумма становится равной B. Но что можно сказать о перестановках (разумеется, затрагивающих бесконечное число членов ряда), не меняющих суммы? Восемнадцатилетний Борель, ученик Эколь Нормаль, следующим образом ответил на этот вопрос.

Пусть

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots \tag{4}$$

— ряд, полученный после перестановки членов ряда (3). Этим самым между членами обоих рядов установлено взаимно-однозначное соответствие вида: $u_m = v_n$, где m и n — натуральные числа. Положим $|u_m - v_m| = \alpha_m$ и назовем α_m смещением члена u_m.

Результат Бореля [5]: для того чтобы перестановка (3) → (4) не меняла суммы ряда (3), достаточно, чтобы произведение максимального смещения членов, предшествующих u_m на абсолютное значение максимума модуля значений членов, следующих за u_m, стремилось к нулю при $m \to \infty$.

Коль скоро зашла речь о результатах Бореля в теории рядов, нельзя не упомянуть о его своеобразном синтезе степенных и тригонометрических рядов.

Подобные ряды возникли в связи с общим подходом Бореля к функциям, имеющим производные всех порядков, но не представимым рядом Тейлора. Соответствующая теорема для функций одной переменной содержится уже в борелевской диссертации [8]. Формулировка ее для функций нескольких переменных совершенно аналогична, но доказательство из-за необходимости получения существенно новых оценок оказалось технически значительно более сложным.

Вот эта теорема [181]: для всякой функции $f(x, y)$ двух вещественных переменных, имеющей производные всех порядков внутри и на границе квадрата $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$, справедливо разложение:

$$f(x, y) = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} (A_{\alpha\beta} \cos \pi\beta y + B_{\alpha\beta} \sin \pi\beta y + C_{\alpha\beta} y^{\beta}) x^{\alpha} +$$
$$+ (A'_{\alpha\beta} \cos \pi\beta y + B'_{\alpha\beta} \sin \pi\beta y + C'_{\alpha\beta} y^{\beta}) \cos \pi\alpha x +$$
$$+ (A''_{\alpha\beta} \cos \pi\beta y + B''_{\alpha\beta} \sin \pi\beta y + C''_{\alpha\beta} y^{\beta}) \sin \pi\alpha x.$$

Входящие сюда константы $A_{\alpha\beta}, \ldots, C''_{\alpha\beta}$ удовлетворяют неравенствам

$$|\alpha^p \beta^q A_{\alpha\beta}| < m_{pq}, \ldots, |\alpha^p \beta^q C''_{\alpha\beta}| < m_{pq},$$

в которых m не зависят ни от α, ни от β.

Доказательство Бореля (компактное изложение его занимает 14 страниц!) основано на использовании систем бесконечного числа линейных уравнений и теоремы Поля Дюбуа-Реймона, которую мы привели выше.

Пенлеве, занимающийся близкой задачей, высоко оценил это достижение своего младшего коллеги.

Опираясь на эту теорему, Борель получил неожиданный результат, относящийся к уравнению гиперболического типа, впрочем не столько к этому уравнению, сколько к понятию аналитичности функции, зависящей от пара-

метра. Как известно, свойства функций, содержащих параметры, существенно зависят от их арифметической природы. Так уже функция $w=z^{\alpha}$, оставаясь аналитической, имеет разные свойства в зависимости от того, будет ли α целым или нет. В работе «Об уравнениях в частных производных и неаналитических функциях» [15] Борель рассматривает уравнение:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\alpha^4\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\psi(x,\ y),$$

в котором правая часть ψ — аналитическая функция, 2π-периодическая по каждому аргументу. Пусть ищется 2π-периодическое решение этого уравнения, непрерывное вместе со всеми его производными по x и y. В зависимости от функции ψ и значения параметра α задача может иметь единственное решение, не иметь ни одного или быть неопределенной. Результат, однако, заключается в следующем: для некоторого α можно задать аналитическую функцию ψ и получить в качестве единственного решения функцию неаналитическую.

В основе вывода лежат следующие тонкие соображения. Пусть α — иррациональное число, при разложении которого в непрерывную дробь для любой ее подходящей дроби $\frac{m_i}{n_i}$ имеет место

$$|m_i-\alpha n_i|<e^{-m_i^3-n_i^3}.$$

Существование такого числа α было Борелем показано. Составим ряд:

$$\sum_i a^{m_i}b^{n_i}\cos^2 m_i x\sin^2 n_i y,$$

где $0<a,\ b<1$. Его сумма представляет собой неаналитическую функцию.

Этот пример Бореля, хотя и не может по своему значению сравниться с примером Адамара некорректности задачи Коши для уравнения $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$, все же хорошо подтверждает утверждение Данжуа, сказавшего, что он не знает другого ученого, который так глубоко и всесторонне продумал понятие числа, как Борель.

Расходящиеся ряды

Конкурсный вопрос Французской Академии наук. По традиции, восходящей еще к XVIII в., Академия наук Франции объявляла конкурсы на решение той или иной математической проблемы или освещение какого-либо актуального вопроса общего характера. В этих конкурсах участвовали и многие иностранные ученые. Так, одна из работ Римана, написанная в начале 60-х годов прошлого века, имела подзаголовок «Ответ на вопрос, поставленный знаменитой Парижской Академией». В 1896 г. та же академия объявила конкурс: «Исследовать и показать, какую роль в анализе могут играть расходящиеся ряды». По-видимому, в такой постановке вопроса сыграло роль то обстоятельство, что Пуанкаре во втором томе своего трактата «Новые методы небесной механики» ввел и использовал асимптотические ряды, расходящиеся в обычном смысле слова.

Расходящиеся ряды родились тогда же, когда и сходящиеся. Они встречались еще у Лейбница, Эйлера, Коши, Абеля и у других, менее знаменитых ученых. Но специально математические работы по расходящимся рядам появились лишь с 90-х годов прошлого века (Чезаро, Пинкерле, Паде), а чуть позднее в работах по теории электрических цепей с ними столкнулся Хевисайд. «Я должен сказать несколько слов, — говорит Хевисайд, — по поводу обобщенного дифференцирования и расходящихся рядов. . . Как мне говорили, я послужил средством стимулирования некоторого интереса к этому предмету. Пожалуй, вряд ли стоит оговаривать, что никоим образом не в Англии, но действительно в Париже недавно была предложена большая премия по поводу роли, которую расходящиеся ряды играют в анализе. . . Надеюсь, что лауреату этой премии будет что сказать».*

Лауреатом этой премии был Борель, и, надо отметить, Хивисайд не ошибся: в ответ на вопрос, поставленный Французской Академией, Борель представил рукопись «Мемуар о расходящихся рядах» [41], которая в опубликованном виде заняла более 120 страниц. Кстати, Борель был хорошо подготовлен к этой теме. Он уже раньше

---

* *Харди Г.* Расходящиеся ряды. Перевод с англ. Д. А. Райкова. М., ИЛ, 1951, с. 55.

интересовался ею, чему, по его словам, послужило стимулом чтение некоторых мест «Алгебраического анализа» Коши.* Но Борель мог бы назвать и Эйлера, который применительно к любым, в том числе и расходящимся, рядам первым указал: прежде чем искать сумму ряда, нужно условиться, что понимать под этой суммой. С современной точки зрения теория суммируемости рядов — это теория тех или иных обобщенных пределов. Наиболее простой признак суммируемости ряда — признак средних арифметических — принадлежит Чезаро (1880), но различного рода обобщенные пределы встречались, в сущности, уже у классиков XVIII и начала XIX столетий. Будучи сформулированы применительно к рядам, они получили в XX в. наименования методов суммируемости Эйлера, Римана, Абеля.

Пусть задан ряд $a_0+a_1+a_2+\ldots$ и, соответственно, $s_0, s_1, s_2, \ldots$ — его частные суммы. Метод суммирования состоит в преобразовании (линейном) этих сумм, при этом должно выполняться условие, если ряд сходится, $\lim s_n = s_n \neq \infty$ существует, то и последовательность преобразованных сумм должна стремиться к пределу, причем тому же самому. Проще всего это уяснить на методе Чезаро. Составим последовательность:

$$s_n^1 = \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_n}{n}; \tag{1}$$

если существует $\lim s_n = s$, то существует и $\lim s_n^1 = s$. Но второй предел может существовать и при отсутствии первого. Тогда говорят, что расходящийся ряд $a_0+a_1+a_2+\ldots$ суммируется по Чезаро, или, короче, суммируем методом $(C, 1)$. Эту процедуру можно повторить, заменяя в (1) s_k на s_k^1 и составляя их средние арифметические s_n^2. Если при отсутствии предела $\lim s_n^1$ существует предел $\lim s_n^2$, то ряд суммируем методом $(C, 2)$. Процедуру можно снова повторить и т. д. Но существуют ряды, не суммируемые методом (C, m) ни при каких m.

Мемуару Бореля [41] предшествовало несколько его работ по расходящимся рядам, среди которых наиболее значительной является статья «Основания теории суммируемых расходящихся рядов» [18]. Именно в этой статье

* Борель был одним из редакторов растянувшегося на много лет издания трудов Коши.

Бореля, а не в его мемуаре [41], получившем премию, были изложены, если не считать подробностей, все основные элементы его теории расходящихся рядов, включая начала их приложения к аналитическому продолжению функций. Прежде всего, Борель формулирует следующие общие условия, которым должен удовлетворять процесс суммируемости ряда.

1) Если ряд сходится и его сумма равна s, то он должен быть суммируем к той же величине s. Это условие в настоящее время принято называть регулярностью метода суммирования.

2) Если в суммируемом ряде Σu_n мы изменим конечное число членов, то получаемый новый ряд Σv_n также должен быть суммируем и величина обобщенных сумм этих двух рядов должна отличаться на $A - A'$, где A' — сумма тех u_n, которые мы изменили, а A — сумма их новых значений.

3) Если Σu_n и Σv_n — два ряда, суммируемые, соответственно, к σ и σ', то для любых α и β ряд $\Sigma\ (\alpha u_n + \beta v_n)$ также должен быть суммируем и притом к величине $\alpha\sigma + \beta\sigma'$.

Метод суммирования Бореля. Обобщенные пределы последовательности (в данном случае имеется в виду последовательность частных сумм ряда Σu_n) $s_0, s_1, s_2, \ldots$ суть обычные пределы от некоторых средних элементов этой последовательности (напомним, что в методе Чезаро это средние арифметические). Исходя из этого, Борель составляет выражение:

$$\psi(a) = \frac{c_0 s_0 + c_1 a s_1 + \ldots + c_n a^n s_n + \ldots}{c_0 + c_1 a + \ldots + c_n a^n + \ldots} = s_0 p_0(a) + s_1 p_1(a) + \ldots, \quad (2)$$

где $c_0, c_1, \ldots$ — неотрицательные числа, и ряд, стоящий в знаменателе, сходится при всех a. Поскольку

$$p_n(a) > 0, \quad \sum_1^\infty p_n(a) = 1, \quad (3)$$

(2) — действительно среднее всех $s_0, s_1 \ldots$.

Из (2) при различных выборах $p_n(a)$ получаются те или иные методы суммирования. Так, при целом a и

$$p_n(a) = \begin{cases} \dfrac{1}{a}, & n < a \\ 0, & n \geqslant a \end{cases}$$

получается метод Чезаро.

Если существует $\lim\limits_{a\to\infty}\psi(a)=\sigma$, то σ есть обобщенная сумма ряда. Доказывается, что при (3) и дополнительном условии

$$\lim_{a\to\infty} p_n(a)=0$$

требования 1^0—3^0 выполняются. Этот метод называется методом, определяемым целой функцией $c_0+c_1a+\ldots$, или, короче, p-методом.

В методе, называемом методом Бореля, $p_n(a)=e^{-a}\frac{a^n}{n!}$. Если существует предел:

$$\sigma=\lim_{a\to\infty} e^{-a}\left(s_0+s_1a+s_2\frac{a^2}{2!}+\ldots\right),$$

то по определению ряд суммируем к σ (B)-методом. Очевидно, что при этом (2) есть математическое ожидание случайной величины со значениями $s_0, s_1, \ldots$, имеющей распределение Пуассона с параметром a, и, надо заметить, Пуассон задолго до Бореля (еще в середине XIX в.) применил этот метод к ряду Фурье.

Обоснование действий над расходящимися рядами потребовало введения дополнительных ограничений. В теории сходящихся рядов законность умножения рядов (u): Σu_n, (v) : Σv_n по правилу $(uv)=\Sigma w_n$, где $w_n=u_0v_n+u_1v_{n-1}+\ldots+u_nv_0$ обеспечивается условием абсолютной сходимости обоих рядов. Распространение этого обстоятельства на расходящиеся ряды оказалось значительно более трудным. Как пишет Фреше, Борелю для этого пришлось проявить большую изобретательность и искусство аналитика.

Пусть $s_0, s_1, \ldots$ — частные суммы ряда и $u(a)=s_0+s_1a+s_2\frac{a^2}{2!}+\ldots$.

Ряд называется абсолютно суммируемым, если при любом r существуют интегралы:

$$\int_0^\infty e^{-a}u(a)\,da,\quad \int_0^\infty e^{-a}|u(a)|\,da,\quad \int_0^\infty e^{-a}|u^{(r)}(a)|\,da. \tag{4}$$

Исходя из этого определения, Борель доказал следующую общую теорему: пусть $P(u, v, w, \ldots)$ — произвольный полином от рядов (u), (v), (w), ..., суммируемых

методом (B), соответственно, к $\sigma(u)$, $\sigma(v)$, $\sigma(w)$, ... Если все они абсолютно суммируемы, то $P(u, v, w, \ldots)$ также суммируем абсолютно, притом к величине $P(\sigma(u), \sigma(v), \sigma(w), \ldots)$.

Обратим внимание на первый из интегралов (4). Он представляет собой как раз обобщенную сумму ряда. Точнее, дело обстоит так. Пусть задан ряд $a_0+a_1+\ldots$, частные суммы которого $s_0, s_1, \ldots$. Пусть он суммируем (B):

$$\lim_{a\to\infty} e^{-a} \sum s_n \frac{a^n}{n!} = s, \tag{5}$$

тогда также

$$\int_0^\infty e^{-x} \sum a_n \frac{x^n}{n!}\, dx = s. \tag{6}$$

На этом основании (6) также считают обобщенной суммой ряда $a_0+a_1+a_2+\ldots$. Как и предыдущий метод суммирования, метод (6) был предложен Борелем. Теперь его, следуя Харди, иногда называют методом B'.
Из равенства:

$$e^{-x}s(x) = e^{-x}a(x) + \int_0^x e^{-t}a(t)\, dt,$$

где

$$a(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots, \quad s(x) = s_0 + s_1x + s_2\frac{x^2}{2!} + \ldots,$$

следует, что оба метода (5) и (6) равносильны, если

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}a(x) = 0. \tag{7}$$

Они, однако, совпадают и при более слабом ограничении. Борелем было показано, что из суммируемости (B) следует (6). Он полагал, что верно и обратное, но, как показал Харди,* это не так. В примере Харди

$$a_n = \sum_0^\infty \frac{(-1)^p (2p+2)^n}{(2p+1)!}, \quad a(x) = e^x \sin x,$$

---

* *Hardy G.* Quart. — J. Mathem., 1903, 35, 22—26. В этой работе исправлены некоторые неточности из ранних работ Бореля [19, 41] и первого издания его книги [56]. Подробнее см.: *Харди Г.* Расходящиеся ряды. . ., гл. VIII.

и для (6) получается

$$s = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt, \tag{8}$$

так что ряд суммируем к (8) методом B'. Но методом B он не суммируем, ибо условие (7) места не имеет.

Приложение метода. Метод Бореля суммирования ряда не только важен сам по себе, но и богат приложениями. И здесь следует прежде всего назвать его роль в исследовании поведения степенного ряда за пределом его круга сходимости. Этому вопросу Борель уделяет много места в своем мемуаре [41], и полученный им основной результат, который будет приведен ниже, давно уже считается классическим.

Пусть

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots \tag{9}$$

и этот ряд (9) сходится в некотором круге $|z| < \rho$. Пусть Q — совокупность всех особых точек P этой функции. Обозначим через П совокупность всех точек z, лежащих по одну и ту же сторону от каждой прямой L_P, проходящей через P перпендикулярно OP. Пусть Г — совокупность граничных точек множества П, а П* — часть плоскости, дополнительная к П+Г. Принято называть Г полигоном Бореля функции f, П — его внутренней, а П* — его внешней областью.

Борель показал, что П есть область суммируемости ряда (9), т. е. ряд суммируем во всех точках П и не сумсируем в точках П*.

Для функции $(1-z^2)^{-1}$ полигон Бореля состоит из двух прямых $x=1$, $x=-1$, П — заключенная между ними полоса. Если окружность сходимости есть купюра функции, то Г совпадает с этой окружностью. Но полигон Бореля не обязательно совпадает с купюрой функции. Например, для функции, у которой купюрой служит прямая $x=1$, полигон Бореля — парабола с фокусом в точке O, касающаяся прямой $x=1$.

Исходным пунктом доказательства является формула Коши для круга:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(u)}{u-z}\, du,$$

которая после некоторых преобразований приводится к виду:

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-t} f(tz)\, dt. \tag{10}$$

Из (9) и (10) следует, что ряд суммируем B' при $z \in \Pi$

Аккуратное проведение всех рассуждений оказалось однако, довольно кропотливым. Здесь обращает на себя внимание сходство равенства (10) с преобразованием Лапласа:

$$L(f) = \psi = \int_0^\infty e^{-zu} f(u)\, du, \tag{11}$$

на котором основано, в частности, операционное исчисление. В процессе исследования своего метода суммирования Борель [41, гл. III] устанавливает предложение, по существу эквивалентное очень важному результату — теореме о свертке для преобразования Лапласа.* Эта теорема, называемая иногда также теоремой Бореля гласит: пусть заданы преобразования Лапласа функций f_1 и f_2:

$$\psi_1 = L(f_1), \quad \psi_2 = L(f_2).$$

Если эти интегралы сходятся абсолютно в полуплоскости $Re z > \gamma$, то в той же полуплоскости преобразование Лапласа функции

$$h(t) = \int_0^t f_1(t-\alpha) f_2(\alpha)\, d\alpha$$

есть $\psi_1\psi_2$.

Нам не известно, чтобы Борель занимался инженерными приложениями аналитических функций, но этой теоремой, которая вместе с теоремой об обращении преобразования Лапласа лежит в основе операционного исчисления, он несомненно внес вклад в прикладную математику.

Заметим еще, что в той же гл. III мемуара [41] находим теоремы, которые заменой (10) преобразованием L могут

---

* *Диткин В. А. и Прудников А. П.* Операционное исчисление. М., 1966, с. 58.

быть переформулированы как условия представимости функции ϕ в виде преобразования Лапласа.

Книга Бореля о расходящихся рядах [56] вызвала очень большое число работ других авторов, в которых были предложены и рассмотрены другие методы суммирования. В отношении последующего развития идей Бореля особенно важными оказались выполненные в первом десятилетии века исследования Миттаг-Леффлера — ученика Вейерштрасса, одного из наиболее авторитетных специалистов по аналитическим функциям. Миттаг-Леффлер предложил метод суммирования, который применительно к степенным рядам позволил выйти за пределы полигона Бореля в более широкую область, простирающуюся в бесконечность, так называемую звезду Миттаг-Леффлера. Однако, как отмечает Харди,* хотя этот и другие подобные методы приводят к лучшим результатам, чем метод Бореля, последний значительно удобнее их благодаря простым формальным свойствам функции e^z и простоте своей конструкции. Харди здесь несомненно имеет в виду удобство применений метода.

Итак, процесс суммирования методом Бореля расширяет область сходимости ряда, заменяя круг сходимости полигоном Бореля. А если степенной ряд $c_0+c_1z+c_2z^2+\ldots$ не имеет круга сходимости, если он сходится лишь в одной точке?

Подобные ряды не являются чем-то патологическим. Достаточно сказать, что к ним приводят линейные дифференциальные уравнения весьма простого вида.

Вот простейший пример. Пусть задано уравнение:

$$z^2w' + w - z^2 = 0. \tag{12}$$

Будем искать его решение в виде:

$$w(z) = \sum_0^\infty c_n z^n. \tag{13}$$

Продифференцировав этот ряд и подставив его в (12), получим для c_n следующие равенства:

$$c_0 = c_1 = 0,\ c_2 = 1,\ c_{n+1} = -nc_n,\ n = 2,\ 3,\ \ldots,$$

откуда

$$w = z^2 - 2!\,z^3 + 3!\,z^4 - 4!\,z^5 + \ldots.$$

---

* *Харди Г.* Расходящиеся ряды. С. 240.

Полученный ряд формально удовлетворяет уравнению (12), но он расходится во всех точках, кроме 0. Просуммируем теперь его методом B':

$$\Phi(z) = \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} - \ldots = z - \ln(1+z),$$

что дает

$$w(z) = \int_0^\infty e^{-t}[tz - \ln(1+tz)]\,dt$$

— аналитическую функцию, удовлетворяющую уравнению (12).

В мемуаре [41] рассмотрен целый класс дифференциальных уравнений, имеющих формальные интегралы, сходящиеся в единственной точке, к которым применимы рассмотренные только что соображения. Вот что говорит Борель по этому поводу: «Этим самым получается возможность получения очень общих классов формальных разложений (в степенные ряды, — *Е. П.*), удовлетворяющих дифференциальным уравнениям, причем обобщенная сумма ряда оказывается решением уравнения, имеющим определенное аналитическое выражение (не только в смысле асимптотического ряда Пуанкаре)» [304, 1, с. 152].

В последующих работах [57, 162] Борель предложил процедуру суммирования, позволяющую выйти за пределы «полигона Бореля» в более широкую фигуру —«В-область», ограниченную отрезками прямых и дугами окружностей. Для случая четырех особых точек A, B, C, D она показана на рис. 1, *б*. При $R \to \infty$, $\rho \to 0$ B-область переходит в звезду Миттаг-Леффлера — область, остающуюся после разреза плоскости вдоль лучей, которые выходят из точек A, B, C, D, лежащих на одной прямой с точкой O.

С совершенно иной точки зрения рассматривает Борель расходящиеся ряды в заключительном параграфе мемуара [41], в котором он обращается к исследованиям Стильтеса: «Резюмируем сначала некоторые результаты Стильтеса из его прекрасного мемуара „О непрерывных дробях“,* представленного Академии незадолго до его безвременной кончины. Небольшое обобщение этих результатов позволит

---

* *Стильтес Т. И.* Исследования о непрерывных дробях. Харьков—Киев, ГНТИ Украины, 1936 г. Впервые этот мемуар был опубликован в Тулузе в 1894 г.

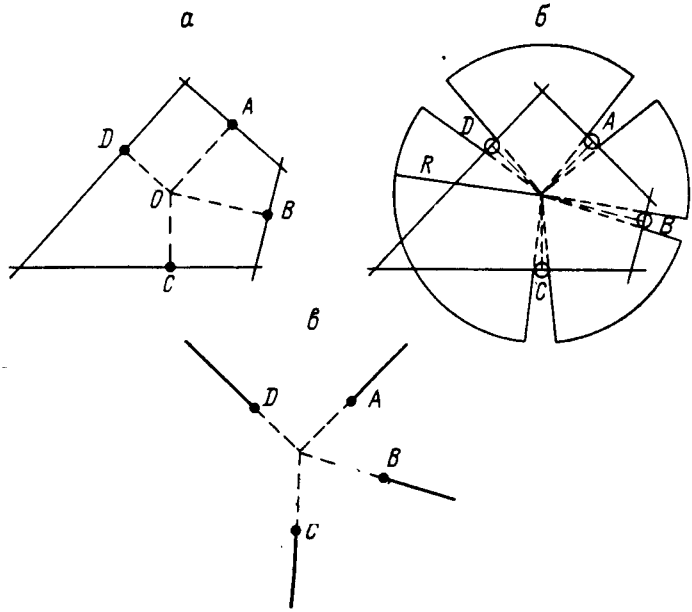


Рис. 1. От полигона Бореля к звезде Миттаг-Леффлера ($R \to \infty$ $r \to 0$).

а — полигон Бореля; *б* — *B*-область; *в* — звезда Миттаг-Леффлера.

нам определить обширный класс расходящихся рядов, которые мы назовем рядами Стильтеса [41, с. 128].

Последовательность положительных чисел $a_1, a_2, \ldots$ называется моментной, если существует функция ограниченной вариации $\psi(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \infty$, такая, что для любого $k=1, 2, \ldots$

$$a_k = \int_0^\infty t^k d\psi(t). \tag{14}$$

Стильтес рассматривал ряды вида:

$$\frac{c_1}{z} - \frac{c_2}{z^2} + \frac{c_3}{z^3} - \ldots, \tag{15}$$

в которых коэффициенты c образуют моментную последовательность. Эти ряды расходятся при всех конечных z, но, как показал Стильтес, они суммируемы к некоторой

голоморфной функции $F(z)$ с помощью метода, основанного на одном применении цепных дробей. При этом имеет место равенство:

$$F(z)=\int_0^\infty \frac{d\psi(t)}{z+t}, \tag{16}$$

в котором $\psi(t)$ — функция, удовлетворяющая соотношениям (14). Последний интеграл существует при всех z, за исключением тех, которые принадлежат вещественной отрицательной полуоси. Этим самым при всех z, за исключением точек $z=x$, $x \leqslant 0$, установлено соответствие между расходящимися рядами (15) и голоморфными функциями (16).

Борель называет (15) рядами Стильтеса и замечает, что применению их в анализе мешает то обстоятельство, что сумма и произведение таких рядов могут не быть рядом Стильтеса. Он ставит себе задачу — выделить класс рядов (15), для которых это свойство сохраняется. Результат Бореля гласит: рассмотрим совокупность функций $\psi(t)$ ограниченной вариации на промежутке $[0, \infty]$, имеющих на нем почти везде производную $f(t)$, удовлетворяющую при некотором b условию:

$$\lim_{t\to\infty} |f(t)|\, e^{b\sqrt{t}}=0.$$

Пусть ψ_1 и ψ_2 — две функции, для которых это справедливо; a_k, b_k — моменты, отвечающие этим функциям. Запишем для ψ_1 и ψ_2 ряды Стильтеса. Тогда сумма и произведение этих рядов есть снова ряд Стильтеса. Затем Борель предлагает два обобщения результатов Стильтеса. В первом вместо степеней z в (15) фигурируют степени некоторых полиномов, во втором ряд Стильтеса тот же (15), но в представлении функции (16) интеграл берется не по полуоси, а по некоторому замкнутому контуру.

Цитированный мемуар Стильтеса имел историческое значение. С одной стороны, он был связан с классическими исследованиями П. Л. Чебышева и А. А. Маркова по методу моментов, завершившими поиски доказательства центральной предельной теоремы теории вероятностей при весьма общих условиях, и, с другой стороны, от него идут нити к спектральной теории, к выдающимся работам, связанным с именами Гильберта, Ф. Рисса, М. Крейна.

Здесь Борель не имел претензий на заслуги, но его дополнение к работе Стильтеса явилось хорошим завершением мемуара [41].

Функции комплексной переменной

Ряд Тейлора и аналитическое продолжение. Сначала остановимся на работах Бореля, относящихся к рядам Тейлора:

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots \tag{1}$$

с конечным радиусом сходимости. При этом на границе круга сходимости (окружности сходимости) непременно имеется хотя бы одна особая точка функции f.

I. Количество публикаций Бореля по этим вопросам, занимающим одно из центральных мест в теории аналитических функций, составляет примерно два с половиной десятка, и все они восходят к раннему периоду его творчества. Во многих из этих работ Борель выступает как продолжатель быстро ставших классическими исследований Адамара и прежде всего — его диссертации «О функциях, представимых рядом Тейлора». Уже в своей первой заметке «О ряде Тейлора» [27] Борель вводит простое, оказавшееся очень полезным, понятие целой функции, ассоциированной с функцией f. Так называется функция F, задаваемая рядом:

$$F(z) = c_0 + c_1 z + \frac{c_2 z^2}{2!} + \frac{c_3 z^3}{3!} + \dots \tag{2}$$

Пусть $z = re^{i\varphi}$; r_0 — фиксировано и максимум $|F(re^{i\varphi})|$, $r = r_0$ достигается в точке $r_0 e^{i\varphi_0}$. Здесь φ_0 — главный аргумент ассоциированной функции F для модуля r_0.

В заметке формулируются следующие две теоремы.

1. Для того чтобы ряд Тейлора (1) на окружности сходимости имел только изолированные особые точки, необходимо, чтобы при $r \to \infty$ главный аргумент модуля функции (2) имел конечное число предельных значений. Эти значения являются аргументами особых точек функции (1), расположенных на его окружности сходимости.

2. Для того чтобы ряд Тейлора можно было продолжить за его окружность сходимости, необходимо, чтобы сущест-

вовало такое r_0, что главный аргумент функции F для значений $r > r_0$ не выходил за пределы фиксированной дуги, меньшей 2π.

Отсюда, как считает Борель, следует, что если коэффициенты ряда (1) произвольны, то окружность сходимости является купюрой. Согласно Борелю, коэффициенты ряда заданы произвольно, если (не считая того, что их задание определяет величину его круга сходимости) задание n первых коэффициентов никак не влияет на задание остальных. «Легко видеть, — пишет Борель, — что для очень большого r коэффициенты, ранг (номер) которых не заключен между $\sqrt{r}$ и r^2, оказывают очень малое влияние на большие значения модуля функции (2). Можно, таким образом, считать, что главный аргумент модуля зависит лишь от коэффициентов, ранг которых заключен между $\sqrt{r}$ и r^2. Таким образом, если коэффициенты произвольны, главные аргументы, когда $r \to \infty$, могут принимать произвольные значения из интервала (0.2π), и ряд (1) не продолжаем за его круг сходимости» [27, с. 1051].

Эти рассуждения молодого ученого, конечно, не носили законченного характера, и в конце своей заметки Борель отмечает, что к аналогичному заключению (ряд Тейлора вообще не продолжаем за окружность сходимости), но из других соображений пришел Э. Фабри (1895).

Заметка [27] заинтересовала одного из ведущих специалистов того времени по аналитическим функциям Миттаг-Леффлера, и он обратился к Борелю с письмом, в котором просил сообщить доказательства указанных в [27] теорем. Борель выполнил эту просьбу. Его ответ [32] был опубликован в виде письма редактору журнала «Акта математика» (этим редактором и был Миттаг-Леффлер). Борель не только привел доказательства, но и уточнил данные в [27] формулировки. Опираясь на один из результатов своего мемуара [29], он показал, что если при некотором $\alpha > 0$ и $r \to \infty$ существует отличный от нуля предел $\lim e^{-r(1-\alpha)}F(re^{i\varphi})$, то данное φ является аргументом особой точки функции f на окружности сходимости ее ряда Тейлора.

В заключение письма [32] Борель снова возвращается к соображениям о купюрах ряда Тейлора. Вопрос о «непродолжаемости ряда Тейлора вообще» интересовал математиков в течение многих последующих лет. По этому

поводу Бибербах говорит следующее: «Фабри [1] и Борель [2—4] (соответственно, в библиографии работ Бореля [27, 28, 32], — *Е. П.*) в 1896 г. высказали мнение, что непродолжимость степенного ряда через окружность его круга сходимости является правилом, а возможность продолжения — исключением. В старости Фабри еще раз попытался объяснить, почему он пришел к такому убеждению. Борель воспринимал эту задачу как некоторый вопрос из теории вероятности».*

Последняя фраза Бибербаха, как видно из цитированных им работ Бореля, является неточной, хотя Борель по этому поводу и высказывал вероятностные соображения. Здесь заслуживает упоминания следующий результат Штейнгауза. Запишем коэффициенты ряда (1) в виде:

$$c_n = \rho_n e^{i\varphi_n}$$

и при фиксированных ρ_n будем рассматривать $M(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots)$ как случайную точку счетномерного куба Q_ω. $0 \leqslant \varphi_n \leqslant 1$, $n=1, 2, \ldots$. На Q_ω можно ввести меру, обладающую свойствами лебеговой меры, причем мера всего куба равна 1. Оказывается, что мера тех $M \in Q_\omega$, для которых ряд (1) может быть продолжен за окружность сходимости, равна нулю. Иными словами, эта окружность с вероятностью единица является купюрой.

II. Вернемся к обзору работ Бореля. Еще до него было замечено, в частности Адамаром, что наличие повторяющихся все время нулей среди коэффициентов c_n ряда (1) (наличие пропусков-лакун) «способствует появлению особых точек» на окружности сходимости. При наличии лакун ряд (1) запишется в виде:

$$\sum_n c_n z^{\alpha_n},$$

где α_n — некоторая возрастающая последовательность натуральных чисел с повторяющимися пробелами. Первый результат о степенных рядах с лакунами был получен Адамаром. В работе «О рядах Тейлора, граница сходимости которых является купюрой» [28] Борель его уточ-

---

* *Бибербах Л.* Аналитическое продолжение. Перевод с нем. М. А. Евграфова. М., 1967, с. 132.

нил, показав, что если для ряда $\sum_n c_n z^{\alpha_n}$ выполняется условие:

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n > \sqrt{\alpha_n}\, s,$$

где s не зависит от n, то он не продолжаем за окружность круга сходимости. «Адамар, — пишет он, — ранее получил результат, аналогичный моему, но в его теореме фигурирует последовательность

$$\frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{\alpha_n},$$

что является более сильным ограничением. В разговоре, который происходил между нами в 1894 году, Адамар высказал предположение о возможности уточнения его результата. Но его метод для этого оказался недостаточным» [304, 2, с. 650, сноска].

Метод доказательства Бореля был основан на использовании интегральных преобразований, аналогичных тем, которые он ввел в теории расходящихся рядов.

Говорят, что все лакунарные ряды с одними и теми же α_n, но, быть может, с разными c_n принадлежат к одному и тому же классу. В своих замечательных работах по ряду Тейлора, выполненных в 20-х годах, Дьердь Пойа исследовал, в частности, свойства подобных классов (например, вопросы о наличии в классе представителя, обладающего заданными свойствами). Однако понятие класса лакунарных рядов и первые относящиеся к ним результаты принадлежат Борелю [77].

III. Интересным было сотрудничество Адамара и Бореля в связи с теоремой об умножении особенностей, принадлежащей первому из них. Так называется следующая замечательная теорема, доказанная Адамаром в 1897 г. Пусть заданы три ряда:

$$\varphi(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots,$$
$$\psi(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots,$$
$$f(z) = a_0 b_0 + a_1 b_1 z + a_2 b_2 z^2 + \ldots,$$

причем первые два из них имеют радиусы сходимости, отличные от нуля и бесконечности. Отсюда следует, что радиус сходимости третьего ряда отличен от нуля; но он может быть равен бесконечности. Эти ряды определяют аналитические функции. Рассмотрим

их во всей области их существования. Обозначим через α_i и β_j, соответственно, особые точки f и φ. Теорема Адамара утверждает, что функция ψ не может иметь иных особых точек, кроме $\alpha_i\beta_j$.

В работе «Об особенностях ряда Тейлора» [38] Борель упростил доказательство Адамара и существенно уточнил теорему, показав, что характер особенностей функции f определяется особенностями функций φ и ψ. Так, он установил, что если функции φ и ψ однозначны, то однозначной является и функция f. Более точные теоремы были установлены в [38] для однозначных функций. Вот одна из них. Пусть единственной особенностью функции φ является полюс порядка m, а единственной особенностью функции ψ — полюс порядка n. Тогда функция f также имеет единственную особую точку-полюс порядка $m+n-1$ в точках $\alpha\beta$, где α и β — соответственно, особые точки φ и ψ.

Целые функции. I. Здесь Борелю принадлежит одно из основных понятий теории — понятие порядка функции, которое он ввел в работе [29].

Пусть

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots \tag{3}$$

— целая функция от z. Принято обозначать

$$M(r) = \underset{|z|=r}{\text{макс}} |f(z)|. \tag{4}$$

Функция $M(r)$ определена при $0 \leqslant r \leqslant \infty$, положительна и $\lim\limits_{r\to\infty} M(r) = \infty$ (иначе f было бы константой). Оставляя в стороне случай, когда f — полином и, следовательно, $M(r)$ растет как n-степень полинома, предположим, что

$$M(r) = e^{r^\rho}, \tag{5}$$

следовательно,

$$\rho = \frac{\ln\ln M(r)}{\ln r} = \lim_{r\to\infty} \frac{\ln\ln M(r)}{\ln r}. \tag{6}$$

Предел в правой части (6) может существовать и для функции более общего вида, чем (5). Отсюда определение: будем считать, что f — функция регулярного роста порядка ρ, если существует предел:

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln\ln M(r)}{\ln r}, \tag{7}$$

равный ρ.

Пусть теперь $f(z)$ имеет бесконечное множество нулей $f(z_n)=0$, $n=1, 2, \ldots$. При этом всегда $\lim\limits_{r\to\infty}|z_n|=\infty$. Как показал Борель, для функции регулярного роста вместе с (7) существует предел:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{r_n}, \quad r_n=|z_n|, \tag{8}$$

причем оба предела (8) и (7) равны между собой.

Функциям регулярного роста Борель придавал большое значение, считая, что они абсолютно превалируют в анализе: «Все известные до сих пор целые функции имеют регулярный рост. . .» [304, 1, с. 162]. Подтверждение этому он, в частности, видел и в том, что открытый Пенлеве в теории дифференциальных уравнений класс целых функций также относится к функциям регулярного роста. Но Борель, конечно, не отрицал и своего интереса к функциям иррегулярного роста, и с ними связано большинство его результатов о целых функциях. В общем случае порядок роста функции $f(z)$ определяется равенством:

$$\rho=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln\ln M(r)}{\ln r}.$$

Таким образом, порядок ρ — это наименьшее k, для которого, начиная с некоторого r, $M(r)\leqslant e^{r^k}$.

Если $\rho=\infty$, то f — функция бесконечного порядка роста (как, например, функция e^{e^z}).

II. Другими важными характеристиками целой функции являются вещественные функции $m(r)$ и $A(r)$. Функция $m(r)$ определяется так. Для каждого $r=|z|$, поскольку ряд (3) сходится при всех z, среди величин $|c_n|r^n$ будет существовать максимальное (или несколько равных максимальных).

По определению

$$m(r)=\max_n|c_n|r^n$$

оказывается, что для функции $f(r)$ конечного порядка $M(r)$ и $m(r)$ логарифмически эквивалентны при $r\to\infty$:

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\ln M(r)}{\ln m(r)}=1. \tag{9}$$

Этот результат был установлен Борелем при некоторых ограничениях, которые затем были сняты Валироном.

Значение равенства (9) заключается в том, что для оценки роста функции f вместо $M(r)$ можно использовать часто более удобную функцию $m(r)$. На этом основан «метод максимального члена ряда», который Борель с успехом использовал в степенных рядах с положительными членами [66, гл. V].

Как известно, аналитическая функция $f=u+iv$ с точностью до произвольного постоянного слагаемого вполне определяется своей действительной частью $u(x, y)$, а также и мнимой частью $v(x, y)$. Поэтому можно было ожидать, что между функцией $M(r)$ и функцией

$$A(r) = \max_{|z| \leqslant r} u(x, y)$$

существует определенная связь. Ее удалось найти Адамару в виде неравенства, которое затем было уточнено Борелем. Неравенство Бореля записывается так:

$$M(r) \leqslant \frac{R}{R-r}(4A(R) - 3A(0)), \quad 0 \leqslant r < R. \tag{10}$$

III. В 1880 г. Э. Пикар доказал знаменитую теорему о целых функциях, которая в упрощенной, но эквивалентной формулировке гласит: целая функция, не принимающая ни значения 0, ни значения 1, является константой. Доказательство было основано на теории эллиптических модулярных функций — функций специального вида, используемых в анализе, в частности, для отображения полуплоскости на области типа луночек.

Представлялось, что модулярные функции являются чем-то посторонним теореме Пикара, что ее можно доказать и без них. Однако лишь через 16 лет Борелю удалось показать, что это действительно так. Рекомендуя его работу [24], Пикар предпослал ей следующее похвальное введение: «Глубокий анализ, проделанный м-сье Борелем, вызовет восхищение всех геометров. Было сделано много безуспешных попыток найти прямое и простое доказательство теоремы без обращения к эллиптическим функциям. Лишь м-сье Адамар, по-моему, сделал удачную попытку в этом направлении, но он ограничился только частным классом целых функций, как это видно из его мемуара, коронованного нашей Академией» [24, с. 1045].

Неравенство (10) явилось одним из звеньев борелевского доказательства этой теоремы. Опираясь на него, он показал, что для двух целых функций f_1 и f_2 не может выполняться тождество вида:

$$e^{f_1}+e^{f_2}=1,$$

а этот факт и влечет за собой утверждение теоремы Пикара.

Заметим, что приведенная теорема Пикара была установлена им в более общей форме: если существуют два таких числа a и b, что целая функция $f(z)$ принимает каждое из них лишь в конечном числе точек, то $f(z)$ есть полином. Борелю принадлежат более общие результаты в этом направлении. Один из них можно представить так: пусть $P(z)$ и $Q(z)$ — два полинома, а $f(z)$ — целая функция конечного порядка. Если уравнения $f(z)=P(z)$, $f(z)=Q(z)$ имеют конечное число корней, то f — также полином. На основе использования метода Бореля доказательства теорем Пикара и их обобщений другими авторами было получено много важных результатов. Один из них (теорема Ландау, 1910) в свое время был воспринят как сенсационный: наименьший радиус R круга $|z|<R$, в котором целая функция $f(z)$ принимает значения 0 и 1, вполне определен заданием чисел $f(0)$ и $f'(0)$.

Как показало дальнейшее развитие теории, модулярные функции, которых Борелю удалось миновать в его доказательстве, все же глубоким образом связаны с проблемами, порождаемыми теоремой Пикара.

IV. Вейерштрассом было показано, что целая функция $f(z)$, имеющая нули $0, z_1, z_2, \ldots$, может быть представлена в виде:

$$f(z)=e^{g(z)}z^m\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)\exp\left(\frac{z}{z_k}+\frac{z^2}{2z_k^2}+\ldots+\frac{z^k}{kz^k}\right), \qquad (11)$$

где g — некоторая целая функция; m — целое число; k — наименьшее число, для которого ряд $\sum\frac{1}{|z_n|^{k+1}}$ сходится.

Этот выдающийся результат породил обширную литературу, в которой работы Адамара и Бореля составили важный рубеж. Как ими было показано, для функции конечного порядка (11) можно заменить аналогичным разложением, в котором g — полином и степени полиномов под знаком exp не возрастают при увеличении k. Соот-

ветствующая прямая теорема, уточняющая формулу (11), была установлена Адамаром, обратная ей теорема была доказана Борелем. По поводу этих теорем Адамара и Бореля см. книгу А. И. Маркушевич [Л. 12, т. 2].

Мероморфные функции. Первой работой Бореля по мероморфным функциям была заметка «О приложении одной теоремы Адамара» [9], где доказано, что мероморфная функция, если она не является отношением двух полиномов, не может быть представлена в круге в виде степенного ряда с целыми коэффициентами. Этот результат звучал неожиданно, ибо свойства коэффициентов ряда быть целыми или нет, казалось, не связаны с аналитической природой задаваемой им функции.

Остановимся на основной работе Бореля по мероморфным функциям [62], результаты которого были им уточнены и развиты далее в книге [70].

В мемуаре рассматриваются главным образом две проблемы: обобщение теоремы Пикара о мероморфных функциях (имеется в виду теорема Пикара о значениях целой функции, распространенная им на мероморфные функции), а также разложение функции на простые дроби. Вторая проблема ранее рассматривалась Миттаг-Леффлером и другими авторами, но Борель подошел к ней несколько иначе.

В основе построений лежит задание мероморфной функции в виде отношения двух целых функций G, F:

$$f(z)=\frac{G(z)}{F(z)},$$

и Борель вводит понятие порядка ρ функции f:

$$\rho=\text{макс}(\rho', \rho'');$$

ρ', ρ'' — соответственно, порядки функций G и F. После этого проводится подробное исследование дробно-линейного преобразования вида:

$$g(z)=\frac{Mf+N}{M'f+N'}, \tag{12}$$

в котором f имеет порядок ρ, а M, N, M', N' — целые функции порядка, меньшего ρ, и $MN'-M'N\not\equiv 0$. Множество записанных таким образом функций g составляет класс, определяемый заданием какого-либо из его представителей. Здесь, однако, возникают частные случаи:

1) среди g нет ни одной целой функции; 2) среди g существуют целые функции, порядок которых меньше ρ; 3) среди g существуют целые функции, и все они имеют порядок ρ. Исследование этих трех случаев позволяет сформулировать следующее обобщение теоремы Пикара: среди всех преобразований (12) функции f существует не больше двух линейно-независимых, порядок которых не превышает ρ. При этом две функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ не считаются линейно-независимыми, если они связаны равенством:

$$M_1 f_1(z) + M_2 f_2(z) + N = 0,$$

в котором M_1, M_2, N — целые функции порядка, меньшего ρ.

Во второй части мемуара вводится понятие ординарной последовательности нулей целой функции. Пусть $F(z)$ — целая функция порядка ρ, пусть $z_1, z_2, \ldots,$ — ее нули и, как и выше, $|z_n| = r_n$. В этом случае нули z_n ординарны, если для произвольного $\varepsilon > 0$, начиная с некоторого n,

$$|F'(z_n)| > e^{-r_n^{\rho+\varepsilon}}. \tag{13}$$

Борель считает это определение оправданным уже тем, что, например, для таких важных функций, как $\sin z$, $\sigma(z)$, (13) выполняется. В результате довольно кропотливого и, насколько можно судить, тонкого исследования устанавливается теорема: пусть $w = F(z)$ — целая функция регулярного роста порядка ρ с ординарным распределением нулей и $G(z)$ — произвольная целая функция порядка, не превышающего ρ. Тогда

$$\frac{G(z)}{F(z)} = \varphi(z) + H(z),$$

где $H(z)$ — целая функция порядка, не большего ρ, а

$$\varphi(z) = \sum_n \frac{A_n}{z - z_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)^{\lambda_n} = \sum_n \left(\frac{1}{z - z_n} + \frac{1}{z_n} + \ldots + \frac{z^{\lambda_n - 1}}{z_n^{\lambda_n}}\right).$$

Коэффициенты A_n находятся непосредственно:

$$A_n = \frac{G(z_n)}{F'(z_n)},$$

откуда видно, что ординарность распределения нулей z_n означает ограничение скорости роста величин $|A_n|$. Что касается последовательности λ_n, то ее нахождение проводится с помощью тонких оценочных рассуждений.

В заключение Борель показывает, что могут быть построены функции весьма простого вида, распределение нулей которых не ординарно. Таковой является, например, $F(z)=\sin\pi z \sin \alpha z$ при подходящем значении параметра α. Здесь $F(n)=0$. С помощью рассуждений, основанных на использовании аппарата непрерывных дробей, Борель показывает, что для функции $\varphi(n)$, растущей как угодно быстро, можно выбрать α так, что $\frac{1}{|F'(n)|} > \varphi(n)$. Последнее противоречит определению ординарного распределения нулей целой функции.

Современная теория мероморфных функций, начало которой было в середине 20-х годов положено работами Неванлинны и других авторов, как по тематике, так и по богатству содержания уже далека от борелевской книги 1903 г. [70]. С позиций сегодняшнего дня (см., например, обстоятельную монографию [Л. 7]) видно, что вклад Бореля в мероморфные функции определяется главным образом не его книгой [70], а его работами по теории целых функций.

Моногенность без аналитичности. Теория моногенных неаналитических функций связана с наиболее сенсационными открытиями Бореля. Они привели к важным обобщениям классической теории функций комплексной переменной, помогли осмыслить взаимоотношение аналитичности в комплексной и вещественной областях, наметили путь к некоторым новым направлениям и прежде всего к теории квазианалитических функций (Данжуа, Карлеман, Мандельбройт).

Начнем с рассмотрения ряда:

$$F(z)=\sum_{1}^{\infty}\frac{A_k}{z-a_k}. \tag{14}$$

Пусть $P=(a_1, a_2, \ldots)$ — множество его полюсов, а P' — множество предельных точек множества P. Предположим, что $P'=\Gamma$, где Γ — простой замкнутый контур, например окружность (иными словами, полюсы всюду

плотны на кривой Г). Пусть D и D_1 — соответственно, области, лежащие внутри и вне Г. При условии:

$$\sum_{1}^{\infty} |A_k| < \infty, \tag{15}$$

которое было введено Пуанкаре, ряд (14) сходится в любой точке z, не лежащей на Г, и определяет в D и D_1, соответственно, аналитические функции $F(z)$ и $F_1(z)$. Однако ни одна из них не является аналитическим продолжением другой, согласно Вейерштрассу: контур, Г-купюра (лакуна, барьер).

Пуанкаре, а за ним Аппель, Гурса и другие ученые в 80-х годах прошлого века полагали, что при наличии замкнутых купюр подобного типа вопрос об аналитическом продолжении теряет смысл. Борель дал широкое обобщение понятия аналитического продолжения, показав что при этом возможен не только проход через купюры разных размерностей, но можно говорить и о поведении ряда (14) в пределах самой купюры.

I. В связи с вопросом об аналитическом продолжении здесь будет уместно остановиться на одном обстоятельстве, открытом Пуанкаре и носящем до некоторой степени парадоксальный характер.

Пусть Г — контур, ограничивающий области и D и D_1. Зададим какие-либо функции $F(z)$ и $F_1(z)$, определенные и аналитические: первая — в D, вторая — в D_1, причем для каждой из них Г является купюрой. Разделим каким-нибудь образом Г на две взаимно-дополнительные дуги Γ_1 и Γ_2. Пуанкаре показал, что существуют функции $g(z)$ и $h(z)$, обладающие такими свойствами: 1) g — аналитическая всюду, кроме дуги Γ_1, которая является для нее купюрой; h — аналитическая всюду, кроме Γ_2, которая служит ей купюрой; 2) в области D функция $g+h$ совпадает с F, а в области D_1 функция $g+h$ совпадает с F_1.

Парадоксальность заключается здесь в том, что поскольку h продолжаема через Γ_1, а g продолжаема через Γ_2, процесс аналитического продолжения, оказывается, приводит к функциям F и F_1, не продолжаемым друг в друга и никак между собой не связанным.

В своей диссертации [8] Борель дал объяснение этого парадокса. Оказалось, что он связан с присутствующей

в скрытом виде многозначностью, хотя названные функции предполагались однозначными.

Все становится более понятным, если обратиться к примеру Бореля и его комментариям. В этом примере контур Г — вещественная ось, что не уменьшает общности рассуждений. Борель различает кажущуюся купюру и истинную. Эти термины он поясняет так. Рассмотрим функцию $w = \ln z$. Если мы, отправляясь от какой-либо точки z_0, опишем контур, внутри которого находится точка О, то w изменится на величину $2\pi i$. Если мы каким-нибудь образом разрежем плоскость вдоль луча l, уходящего из О в бесконечность, то такие замкнутые контуры уже нельзя будет описывать, и в разрезанной плоскости w будет однозначна. Направление луча l тут не играет роли, он не связан с функцией w, не определяется ею, и, следовательно, купюра l — кажущаяся, видимая. Все сказанное для произвольной однозначной аналитической функции $g(z)$ распространяется и на функцию:

$$\theta(z) = g(z) \ln z.$$

Отправляясь от ее значений в точке z_0 и описывая контур вокруг начала, изменим значение θ на число $g(z_0)\, 2\pi i$. Но и здесь можно сказать, что купюры, делающие θ однозначной функцией, кажущиеся.

Совсем иначе обстоит дело для функции:

$$\varphi(z) = \sum_{p,\, q=1}^{\infty} \frac{e^{-p-q}}{qz + p}.$$

Она однозначна, имеет полюсы — все точки, для которых z — вещественные отрицательные рациональные числа. Они расположены всюду плотно на отрицательной вещественной полуоси, которая и является для φ купюрой, однозначно определяемой самой φ. Такую купюру назовем существенной или истинной. А теперь составим функцию:

$$\psi(z) = \varphi(z) + \theta(z) = \varphi(z) + g(z) \ln z.$$

Та же полуось является существенной купюрой для этой суммы, причем последняя, несмотря на наличие многозначного слагаемого-логарифма, уже однозначна. Как говорит Борель, совпадение видимой купюры (отри-

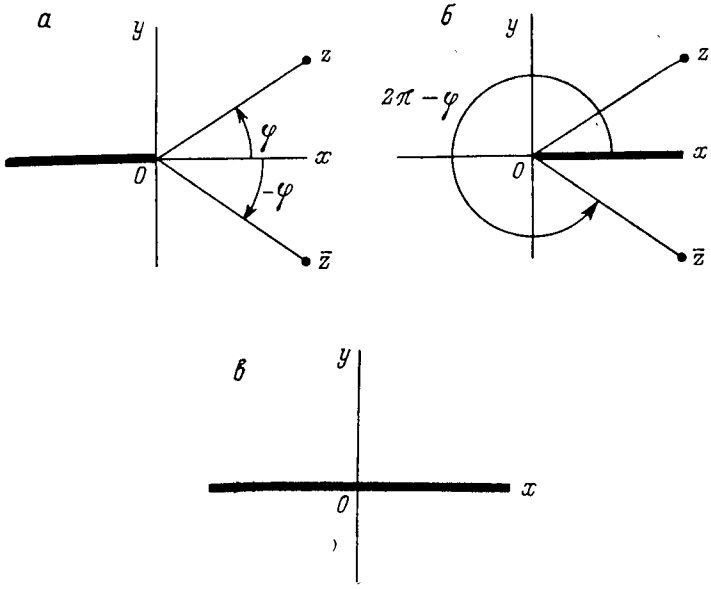


Рис. 2. К объяснению парадокса Пуанкаре.

Верхняя полуплоскость, соответственно, *а*, *б*, *в*: $\psi=\varphi-g(\ln\rho+i\varphi)$, $\psi_1=\varphi_1+g(\ln\rho+i\varphi)$, $\psi+\psi_1=\varphi+\varphi_1$; нижняя полуплоскость, соответственно, *а*, *б*, *в*: $\psi=\varphi-g(\ln\rho-i\varphi)$; $\psi_1=\varphi_1+g(\ln\rho+i(2\pi-\varphi))$; $\psi+\psi_1=\varphi+\varphi_1+g2\pi i$. $\ln z=\ln\rho+i\varphi$, — — купюра.

цательная полуось для функции θ) и существенной купюры (та же полуось для функции φ) делает однозначной сумму ψ, однозначной и многозначной функций φ и θ. В этом и заключается ключ к парадоксу Пуанкаре, но требуется сделать еще шаг, чтобы создать описанную им ситуацию.

Запишем функцию $\varphi_1(z)=\varphi(-z)$. Она такая же, как и φ, но имеет купюрой положительную вещественную полуось. Пусть теперь

$$\psi_1(z)=\varphi_1(z)-g(z)\ln z,$$

причем для $\ln z$ здесь в верхней полуплоскости берутся те же значения, что и для $\ln z$ в ψ. Для функции $\psi_1+\psi$ купюрой является уже вся ось X. В верхней полуплоскости ее значения равны $\varphi(z)+\varphi_1(z)$, но значения $\psi+\psi_1$ в нижней полуплоскости иные: $\varphi(z)+\varphi_1(z)-2\pi ig(z)$ ввиду наличия купюр и изменения значений $\ln z$ при переходе от z к сопряженному значению z (рис. 2).

Ввиду произвола выбора функции $g(z)$ указанное Пуанкаре построение действительно реализовано. Изложенные соображения были высказаны Борелем, когда ему шел 23-й год. Впоследствии Валирон писал по этому поводу: «Борель опроверг возражения, которые Пуанкаре заранее выдвинул против любой попытки расширить понятие естественного продолжения, построив примеры функций, допускающих эффективное и совершенно произвольное продолжение через купюры».*

II. Возвращаясь к рядам (14), заметим, что как вопросы о купюрах функций, так и понятия, о которых будет речь ниже, могут быть рассмотрены и помимо этих рядов, но последние представляют собой важный объект, с помощью которого будет проще проследить излагаемые закономерности.

Предположим, что полюсы a_1, a_2,. . . в (14) расположены всюду плотно в некоторой одно- или многосвязной области D (D может, например, быть эллипсом, кольцом, заключенным между двумя окружностями,. . .). Область, дополнительную к D, обозначим через D_1. В этой области сумма ряда (14) при условии (15) представляет собой аналитическую функцию $F_1(z)$. Первый шаг Бореля состоял в замене условия (15) более сильным условием:

$$\sum_{1}^{\infty} |A_k|^{1/2} < \infty, \tag{16}$$

исходя из которого он доказал следующие теоремы.

1. Пусть l — произвольная прямая и $\{l\}$ — семейство прямых, параллельных ей. Совокупность тех прямых из $\{l\}$, вдоль которых ряд (14) не сходится абсолютно и равномерно, пересекается с любой прямой m, не параллельной им, по множеству, имеющему на m меру нуль, т. е. по множеству, которое можно покрыть совокупностью интервалов, сумма длин которых сколь угодно мала.

Отметим, что множества меры нуль возникли у Бореля (первоначально в [8]) в связи с подобными теоремами, относящимися к хронологически первым результатам метрической теории аналитических функций.

---

* *Валирон Ж.* Аналитические функции. Перевод с фр. В. С. Виденского. М., ГТТИ, 1957, с. 72—75. В этой книге изложена с полным доказательством названная теория Пуанкаре и комментарии к ней Бореля без приведенного здесь примера.

2. Пусть z' и z'' — две произвольные точки из D. Существует бесконечное множество линий, параллельных отрезку $z'z''$, на каждой из которых ряд (14) сходится к непрерывной функции $F(z)$, равной $F_1(z)$ на D_1.

Ряды (14) специального вида, когда полюсы a расположены всюду плотно в треугольнике $ABC=\Delta$, впервые появились в фундаментальных работах Пуанкаре по автоморфным функциям (1881).* Вслед за ним этими рядами занимались Гурса, Принсгейм и другие. Из того, что полюсы лежат в Δ всюду плотно, все авторы, отмечал Фреше, заключали, что ряд Пуанкаре не может быть рассмотрен в Δ. Можно сказать, никто не решался заглянуть в эти джунгли всюду плотного расположения полюсов. В действительности же, как показал Борель, для ряда Пуанкаре, как и для других, ему подобных, справедливы приведенные выше теоремы 1 и 2. Но еще более существенной явилась следующая теорема, показывающая, что в некоторой части множества D может быть определен новый класс функций — моногенные неаналитические функции.

3. Пусть Γ_0 — произвольный кружок, лежащий в D. Тогда существует такая точка $z_0 \in \Gamma_0$, что внутри любого угла с вершиной в z_0 будут существовать прямые m равномерной и абсолютной сходимости ряда (14) и его можно сколько угодно раз дифференцировать в этой точке по направлению каждой прямой m. При этом $F^1(z_0)$ зависит лишь от точки z_0. Иными словами, $F(z)$ — моногенна в точке z_0, по Коши. Пусть теперь γ — какой-либо замкнутый контур сходимости ряда (14), целиком лежащий в D (из предыдущего вытекает, что такие контуры существуют). Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f(z)\,dz = \sum_k{}' A_k, \tag{17}$$

где сумма в правой части распространяется на все k, для которых A_k лежат в γ. Последнее равенство в точности соответствует теореме Коши о вычетах аналитической функции.

Таким образом, в определенном смысле и у Бореля идет речь об «аналитическом» продолжении функции $F(z)$

---

* *Пуанкаре А.* Избр. тр. в трех томах. Т. 3. М., «Наука», 1974, с. 605—607.

из области аналитичности D_1 в область D. Кавычки в этой фразе означают, что здесь подразумевается нечто отличное от аналитического продолжения по Вейерштрассу. В связи с этим полезно еще и следующее замечание. Процесс продолжения Вейерштрасса основан на понятии ряда Тейлора, причем последний всегда должен сходиться внутри некоторого круга. Если попытаться применить тот же процесс к продолжению F из D_1 в D, то мы столкнемся с рядом Тейлора, сходящимся лишь в единственной точке z_0. Но в главе о расходящихся рядах мы видели, что теория суммируемости умеет справляться с подобными рядами. Здесь же следует только подчеркнуть, что теория суммируемости рядов имеет непосредственное отношение к проблемам продолжения функций в область их неаналитичности. Вопросы эти в первом десятилетии века явились предметом содержательных параллельных исследований Бореля и Миттаг-Леффлера. Подробности и соответствующая литература имеются в работе Бореля «О рядах полиномов и рациональных дробей» [57]. В этом мемуаре теория рядов (14) распространяется на ряды по произвольным рациональным дробям и соответственно обобщаются результаты о купюрах функций. Все это сопровождается массой тонких подробностей, и, насколько я в состоянии судить, мемуар [57] следует считать одной из самых значительных работ Бореля.

III. Систематизируем, по возможности, изложенное и подведем предварительный итог. Обобщение теории аналитических функций (точнее, теории Вейерштрасса), осуществленное Борелем, основано на трех пунктах, что схематически можно изобразить так:

	Понятие области	Аналитичность	Продолжение
Вейерштрасс	Открытое множество G	Дифференцируемость на G	Продолжение с помощью ряда Тейлора
Борель	Множество (C)	Дифференцируемость на (C)	Продолжение с помощью суммирования ряда

Здесь остается не разъясненным лишь понятие «множества Коши».

Пусть G — обычная область в плоскости z. Рассмотрим в G какое-либо счетное множество точек $z_1, z_2, \ldots$, которое может быть и всюду плотным в G (в последнем случае можно считать, например, что $z_k = x_k + iy_k$ — это совокупность всех $(x_k, y_k) \in G$, для которых x_k, y_k — рациональные числа). Пусть каждому z_n отвечает множество кружков Γ_h^n с центром в z_n, с радиусами $\frac{\rho_n}{h}$, $h = 1, 2, \ldots$.

$$\Gamma_h^n: \ |z - z_n| < \frac{\rho_n}{h}. \tag{18}$$

Пусть $\bar{G}$ — замыкание множества G, т. е. G вместе с его границей. Для каждого фиксированного h множество, дополнительное в $\bar{G}$ к сумме всех Γ_h^n, обозначим C_h. Очевидно, что C_h с увеличением h расширяются.

Множеством Коши (C) называется соединение всех множеств C_h: $(C) = \lim\limits_h C_h$.

Указанный процесс построения множеств C_h и (C) называется методом исключения: для каждого h исключается счетное множество кружков (18). При этом требуется, чтобы радиусы исключаемых кружков стремились к нулю: $\lim\limits_n \rho_n = 0$. Таким образом, на каждом этапе, т. е. для каждого h, исключается счетное множество все более и более мелких кружков, затем при переходе к следующему этапу (при увеличении h) кружки концентрически уменьшаются. В итоге, при построении (C) из множества G исключается множество меры нуль.

Функция $f(z)$ называется моногенной на (C), если для всех $z \in (C)$ существует непрерывная на (C) производная, не зависящая от того, как $\Delta z \to 0$.

Используя дополнительные ограничения относительно скорости убывания величин ρ_n, Борель путем громоздких технических построений сводит изучение непрерывности и дифференцируемости функций на (C) к аналогичным вопросам на более «осязаемых» множествах C_h.

Последние — совершенны (замкнуты и содержат все свои предельные точки), но могут быть всюду на G разрывны.*

---

* Метод исключения Бореля несомненно навеян канторовым процессом построения совершенных всюду разрывных множеств.

Моногенные на (C) функции, вообще говоря, не являются аналитическими, по Вейерштрассу, но, как показал Борель [162], для них справедливы следующие теоремы.

1. Пусть $(C_0)\subset(C)$ и (C_0) — также множество Коши. Если $f=0$ на (C_0), то $f=0$ и на (C).

2. Моногенная функция имеет в любой точке $z_0\in(C)$ производные всех порядков $f^{(\nu)}(z_0)$, $v=2, 3, \ldots$.

3. Если для некоторого $z_0\in(C)$ $f(z_0)=f^{(\nu)}(z_0)=0$, $\nu=1, 2, \ldots$, то $f=0$ и на всем (C).

Все эти теоремы хорошо известны в классической теории аналитических функций комплексной переменной. Этим самым, как подчеркивал Борель, им установлено, что понятие моногенности, на котором основывался Коши, является более общим, нежели классическое понятие аналитичности для функций, заданных в области.

IV. Возвращаясь к началу этого раздела, к рядам (14), мы видим, что дает теория Бореля для случая, когда полюсы a_k расположены всюду плотно в некоторой области G. Путем исключения кружков с центрами в полюсах, как это было описано в III, мы получим множество, принадлежащее G, в котором при соответствующих условиях относительно A_k функция (14) — моногенна.

Очень важен случай, когда особенности функции концентрируются всюду плотно по обе стороны оси X. Мы приходим к функциям вещественной переменной x, имеющим производные всех порядков, но не продолжаемым в комплексную область. Но и при этом может сохраняться следующее свойство аналитических функций комплексной переменной: две функции f_1 и f_2, совпадающие со всеми своими производными в некоторой точке x, совпадают и в любой другой точке.

В работах Данжуа и Карлемана был установлен ряд важных теорем о подобных квазианалитических функциях. Как отмечали эти ученые, их исходные установки были связаны с борелевскими концепциями моногенности. Но дальнейшие намерения Бореля шли в другом направлении. Он наметил программу построения теории моногенных неаналитических функций нескольких переменных, ко-

---

Подробнее о них см.: *Александров П. С.* Введение в общую теорию множеств и функций. М., 1948, гл. 7.

торая обобщала бы классическую теорию потенциала, с включением в нее случаев дискретного всюду плотного на многообразиях распределения масс. Относящиеся к этому замыслу публикации носили лишь предварительный характер (см. приложения к книге [70], а также [304], т. 3).

Выше было сказано, что при построении множества (C), на котором определена моногенная неаналитическая функция, из области удаляется множество нулевой меры. Может показаться, что эти множества вообще не существенны в данной теории подобно тому, как в теории интеграла Лебега пренебрегают множествами меры нуль. Дело обстоит, однако, совсем иначе. Именно особенность удаляемого множества определяет, грубо говоря, природу моногенной на (C) функции. Тонкость теории в значительной степени связана со сложностью понятия множества нулевой меры, таящего в себе и по сей день много загадочного. Возникшие здесь проблемы интересовали Бореля длительное время после того, как он, оставив теорию функций, переключился на другие дисциплины. В работах [148, 163, 169] он предложил различные подходы к классификации множеств нулевой меры и к изучению их структуры. Систематическое и сравнительно доступное изложение этих результатов содержится в книге Бореля [285], весьма краткий критический их обзор можно найти у Фреше [Л. 5].

Устами его знавших

В рассказе о Бореле как о человеке мы будем следовать Фреше, который, говоря о Бореле, для большей достоверности в свою очередь ссылается на Морена, де Бройля, Коллингвуда, приводит также высказывания Маргариты Борель [Л. 5, с. 1, 2—14].

Эмиль Борель был высокого роста, стройный, отличался крепкой физической конституцией. В молодости он носил большую черную бороду. С годами — предпочитал бороду в виде эспаньолки, со временем заметно поседевшую. Таким он выглядит на фотографии, отличающейся большим сходством с оригиналом (см. обложку).

Борель был отличным ходоком, любил бродить по горам и очень хорошо плавал. Один американский коллега рассказывал Фреше: «Борель был силен физически: когда мне было тридцать лет, я находился с ним на одном конгрессе, происходившем на берегу моря. Мы договорились, что немного поплаваем. Вместе отплыли от берега; некоторое время я плыл, а затем обнаружил, что не вижу Бореля (старшего меня, по крайней мере, на десяток лет) ни сзади себя, ни справа, ни слева. В действительности, он далеко меня обогнал». Коллингвуд так дополняет его портрет: «Мои воспоминания. . . о его высокой внушительной фигуре, красивой голове с шапкой густых волос и кругловатой стриженой бородой, когда-то черной, но теперь заметно серо-седой, его глаза светились». В другом месте он пишет о Бореле: «По внешности и манерам он был импозантен, в нем чувствовалось собственное достоинство, он выглядел соответственно роли, которую играл».

Морен писал о Бореле так: «Когда я поступил в 1890 году в Эколь Нормаль, я нашел, что все в ней было наполнено авторитетом Бореля. . . его репутация импонировала нам, обязывала нас, но он был с нами мил и помогал нам в простых, доступных беседах. Борель был очень верен своим друзьям. Никто не считал, что он смотрел высокомерно, холодно. Что наилучшим образом мне о нем напоминает, это, как он расцветал, когда готовился сообщить кому-нибудь приятную весть.

Позднее, когда я уже был студентом, он был все еще прост и доступен. Все же факт, что его возрастающая известность привела к тому, что он впоследствии стал оберегать свои свободные минуты от посторонней назойливости. Это определило некоторую его отдаленность». Луи де Бройль пишет: «. . .некоторые упрекали его в несколько грубоватом обращении, которое подчеркивалось манерой говорить довольно сухо. Но эта грубоватость была чисто внешней. Все, кто был с ним хорошо знаком, знают, что за ней скрывалась большая уравновешенность характера, настоящее понимание мнения собеседника и чаще всего истинная благожелательность».

Со своей стороны, Коллингвуд замечает: «Если, как человек, он стал менее доступен отдельно взятым математикам, то это компенсировалось тем, что он мог принести бóльшую пользу математикам и науке в целом благодаря своему исключительному положению и своему

влиянию». В таком же ключе говорит и Морен: «Было бы весьма неточным, говоря о Бореле, замалчивать видимость некоторых характерных для него обстоятельств. Выходец из местности с суровым климатом, он нес в себе его определенный отпечаток. В то же время, обладая очень живым интеллектом, схватывающим мгновенно интерес и сущность проблемы, он, бывало, раздражался медлительностью разговоров и дискуссий собеседников и мог показывать это. Однако, и что было его главной добродетелью, он умел быть великодушным, а также терпеливым вплоть до мелочей». Морен также говорит, что Борель «самый сильный из шахматистов его окружения, не важничал, не пренебрегал партнерами-новичками, приветствуя их хорошие ходы, направлял их игру».

Очень интересно отметить соответствие этих мнений с высказываниями Коллингвуда, в которых он в очень живой форме рисует впечатление, которое Борель произвел на него, тогда еще студента в Париже: «Мои воспоминания от его лекций, всегда собиравших полную аудиторию большого амфитеатра Сорбонны: [Борель читал их], свободно передвигаясь вдоль большой доски и то и дело возвращаясь к кафедре, чтобы мельком взглянуть на единственный листок бумаги, которым он руководствовался. Его манеры были повелительны, но стиль живой и даже простонародный; фразы, которые он произносил, и по сей день у меня в памяти. Лекции заканчивались под аплодисменты. Они всегда были стимулирующими. Несомненно, он мог казаться строгим, но я помню любезность, с которой я, молодой иностранец, был принят в его квартире на улице дю Бак, и помощь, советы, которые я там получал» [Л. 4, с. 500].

Но лучше других знала своего мужа мадам Борель: «Любопытный во всех областях, всегда жадный к познанию и надежный друг, он презирал одобрение равнодушных, раздражался лестью и комплиментами, так что порой отталкивал тех, кто не был способен его ценить. . . Жизнь слишком коротка, — говорил он, — чтобы предпринимать бесполезные усилия нравится тем, кому не интересен и кто не интересен нам. . . Он сиял, когда мог помочь кому-либо или когда видел кого-нибудь счастливым. . . Эмиль всегда игнорировал ревность, радовался успехам своих друзей как своим. Он любил авейронских крестьян, с которыми имел много общих черт характера, откры-

тость, простоту, смелость. . . От своих родителей Эмиль Борель унаследовал протестантскую строгость духа, презрение к богатствам и роскошной жизни. . .».

Борель-полемист. Независимость характера. На основании прочитанного едва ли кто-нибудь усомнится в том, что Борель был сильным полемистом. Но хочется отметить такую его особенность: оставаясь твердым в своих взглядах, он не позволял себе относиться без уважения к мнению других (имеются в виду, конечно, сугубо научные дискуссии). И это не потому, что его оппонентами были поистине выдающиеся люди — ле Дантек, Бергсон, Лебег. При твердости своих убеждений Борель обычно терпимо относился к противоположной точке зрения. И именно этим можно объяснить тот факт, что он подчас щедро цитирует высказывания, явно для него неприемлемые (например, в [129]), является инициатором дискуссий, в которых представлены разные мнения, например в дискуссии о трансфинитном, на которой мы остановимся в одной из следующих глав.

Ко всему этому следует еще добавить, что Борель был человеком с очень независимым характером. Это хорошо видно по его отношению к Коши и Пуанкаре.

Шербур. 1810 год. Приехавший сюда для участия в фортификационных работах, проводившихся по приказу Наполеона в связи с войной против Англии, Огюстен Коши, которому недавно исполнилось 20 лет, общается с офицерами и подчиненными им, своими сверстниками. Учение мыслителей XVIII в. Вольтера, Даламбера, Дидро и других повсюду пустило глубокие корни: Коши сталкивается с неверием. Воспитанный в семье, где сильны традиции католицизма, он пишет матери длинное письмо, в котором заверяет своих родителей, что всегда будет предан их религии.* Таким он остался до конца жизни. Коши был кумиром Бореля, но сам Борель, хотя так же был воспитан людьми, посвятившими себя религии, был к ней равнодушен.

Такое же отношение и к другому кумиру Бореля — Пуанкаре. Упоминая кое-где о философских взглядах Пуанкаре («реальность для него была сочетанием матема-

---

* *Valson C. A.* La vie et les travaux du baron Cauchy. Paris, 1868, chap. III.

тических понятий»), Борель к ним не присоединяется. Еще при жизни Пуанкаре он выступал против ряда его высказываний.

Теория вероятностей

Философский и прикладной аспекты

Переход Бореля от анализа к теории вероятностей не следует рассматривать просто как перемену области исследований, подобно тому, как, например, Адамар перешел от аналитических функций к дифференциальным уравнениям. Изменение характера творческой деятельности Бореля носило более радикальный характер. Опубликовав в общей сложности примерно 50 работ по теории вероятностей и ряд книг, относящихся к ней, Борель все же остался в стороне от магистральных направлений развития этой дисциплины в XX в.

Он был уже признанным аналитиком, когда в 1900 г. А. М. Ляпунов и А. А. Марков независимо друг от друга и разными путями завершили доказательство центральной предельной теоремы теории вероятностей при весьма общих условиях. Метод моментов Чебышева—Стильтеса, которым пользовался Марков, был Борелю хорошо знаком. Он встречается у него в мемуаре по расходящимся рядам [41] и в книге по вещественным функциям [87]. Но Борель не занимался предельными теоремами теории вероятностей; он остался в стороне и от последующего развития теории сложения случайных величин, получившей далеко идущее развитие в работах Колмогорова, Хинчина, Поля Леви, Феллера и других. В начале 30-х годов Крамером была доказана гипотеза П. Леви: если сумма двух независимых случайных величин имеет нормальное распределение, то одно, а значит, и оба слагаемых также распределены но нормальному закону. В возникшей вслед за этим теории разложения вероятностных законов, как оказалось, были существенно использованы методы теории целых функций. Кому как не Борелю, классику этого направления анализа, было не сказать тут своего слова? Но Борель остался в стороне от этих вопросов, равно как и от теории случайных процессов, ос-

новы которых в начале 30-х годов были заложены тем же Колмогоровым, Хинчиным, П. Леви, Феллером. И все же вклад Бореля в теорию вероятностей весом и своеобразен. Еще в 1905 г. в заметке «О некоторых вопросах теории вероятностей» [93] он первым отметил роль понятия меры и интеграла Лебега в теории случайных величин. Как известно, именно на этом пути через четверть века А. Н. Колмогоровым была построена аксиоматика теории вероятностей. Работы Бореля по вероятностной метрической арифметике, по счетным вероятностям, о которых будет рассказано ниже, явились основополагающими. Борелю принадлежит и открытие усиленного закона больших чисел.

Большое место в публикациях Бореля по теории вероятности занимают работы прикладного характера. Очень широк круг затронутых им конкретных вопросов: кинетическая теория газов, экономика и социальное страхование, метеорология, генетика, биометрика, парадоксы, связанные с теорией азартных игр, построение кривых распределения, числовые расчеты, связанные с играми специального вида (прежде всего с игрой в бридж), наконец одно из главных достижений позднего периода творчества Бореля — создание начал теории стратегических игр. Последняя, как известно, была одновременно и независимо от Бореля основана и далеко развита в работах фон Неймана.

Во всех работах по перечисленным вопросам поражает одно обстоятельство: за сравнительно немногими исключениями, Борель стремится ограничиться как можно более простым, а зачастую прямо-таки примитивным математическим аппаратом. Во многих его прикладных работах, например, по метеорологии вместо формул встречаются многочисленные числовые таблицы и соответствующие словесные рассуждения. Борель словно предоставляет другим то, что принято называть статистической обработкой результатов наблюдений.

Уже отмечалось, что Борель, будучи классиком теории аналитических функций, не занимался ее инженерными приложениями. Таким образом, можно констатировать, что переход Бореля к теории вероятностей был ознаменован его решительным переключением на практические задачи разнообразного содержания. Наконец, именно теория вероятностей натолкнула Бореля на ряд

вопросов философского, а во многом и психологического характера, которые явились объектом его многолетних размышлений. Это были вопросы иного плана, нежели те, которые занимали Бореля в связи с его конструктивным подходом к анализу (отрицание правомочности аксиомы Цермело и т. п.), хотя, надо сказать, что и в теории вероятностей он остается верен своим конструктивистским тенденциям.

В рассматриваемый период творчества Бореля его во многом занимает уже не чисто математическая проблема: что реально дает нам знание вероятности того или иного события? Вопрос этот уже тогда был не нов, в той или иной степени его касались Кондорсе, Пуассон, Бертран и другие. Но со всей остротой он был поставлен именно Борелем, с самого начала понимавшим, что здесь всякий раз требуется рассмотрение вопроса по существу. Публикации Бореля рассказывают нам о его контактах в этом направлении с представителями самых разных специальностей и об использовании их экспериментальных данных.

Метод большинства в статистике. Вероятность и достоверность. Интересным было сотрудничество Бореля с Альфредом Бине — психологом, представителем школы Шарко. Наблюдения Бине широко обсуждены в работе Бореля «Вероятности и метод большинства» [105].

Борель называет методом большинства концепцию, состоящую в том, что считается практически надежным мнение, выраженное большинством после подсчета мнений более или менее значительного числа лиц. Ссылаясь на некоторые высказывания Стюарта Милля, Кондорсе, Лапласа относительно юридических вопросов, Бертран высказал ряд доводов против использования методов большинства в теории вероятностей.

В противовес этому Борель показывает, что элементарный статистический анализ (здесь все рассуждения его не выходят за рамки биномиального закона распределения) подтверждает правомочность метода большинства применительно, например, к опытам Бине и его сотрудницы Руссон.

Заключение Бореля гласит: «Метод большинства открывает нам, что имеется „нечто объективное“, затем непосредственное наблюдение явлений дает возможность формулировать гипотезы, которые должны быть проверены новыми опытами. Вычисление играло здесь, как

всегда в экспериментальных науках, только роль посредника между двумя опытами, но эта роль путеводителя в опыте, хоть и скромна, очень часто является весьма полезной» [105, с. 150]. Последнее Борель подтвердил и кропотливым анализом опытов английского психолога Тичнера [105, VI]. Подробности о борелевских идеях, связанных с методом большинства, содержатся в главе 9 его книги «Случай». Мы еще вернемся к ней, а сейчас расскажем о некоторых интересных вопросах, затронутых в другой его книге «Вероятность и достоверность», вышедшей через 40 лет после предыдущей.*

В предисловии к этой книге Борель с самого начала поражает читателя таким утверждением: «До сих пор в моих писаниях, особенно в книге „Случай", я пользовался общеупотребительным у физиков выражением, когда речь шла о физических явлениях, вероятность которых крайне мала. В таких случаях ограничиваются утверждением, что в высшей степени невероятно осуществление таких явлений, но спешат добавить, что это не достоверно.

Мне представляется в итоге размышлений, что такой подход не реалистичен, что он не учитывает совокупность наших сведений о вселенной (по-видимому, лучше было сказать, не учитывает специфику человеческого знания, — *Е. П.*), и я пришел к выводу, что не следует бояться применить слово достоверность для обозначения вероятности, которая отличается от единицы на крайне малую величину. Я тем лучше могу себе представить возражения, которые можно выдвинуть против такого изменения терминологии, что в свое время я их сам выдвигал. . .».

Все это очевидным образом переформулируется для необычайно редких событий. В качестве примеров таковых Борель приводит: а) чудо Джинса — событие состоящее в том, что вода в сосуде, поставленном на нетающий лед, закипит, б) дактологграфическое чудо — событие, состоящее в том, что некоторое количество обезьян, барабаня по клавишам пишущих машинок, напечатают заданное научное или литературное произведение.

---

* Обе названные книги имеются в русском переводе: *Борель Э.* Случай. М., ГИЗ, 1923; *Борель Э.* Вероятность и достоверность. Перевод с фр. И. Б. Погребысского. М., ФМ., 1961.

Для чуда Джинса известно приближенное значение вероятности $1 : 10^{10^{46,1}}$. Для дактологграфического чуда (обезьяна, «Гамлет», 27000 букв и пропусков, 35 клавиш) вероятность равна $1 : 35^{27\,000}$.*

Мы усматриваем сущность аргументации Бореля (достоверность того, что чудо не произойдет) в следующих его словах: «Пожалуй, надо согласиться с одним математиком, что эта достоверность не совсем того же рода, что достоверность определенных математических теорем (например, теоремы о поверхности шара), — теорем, доказательства которых были проверены миллионами людей. Правда, можно и тут возразить математику, что он считает столь же достоверными значительно более поздние и сложные теоремы, доказательства которых были проверены довольно малым числом лиц, и что в этом последнем случае заведомо имеется малая вероятность ошибки. Эту вероятность трудно оценить, но ничто не дает нам права считать ее меньшей, чем вероятность дактологграфического чуда».**

Древний софизм кучи зерна. Известно, что одно зерно не составляет кучи, не составляют его два, три. . . , но, скажем, 105 зерен — это уже куча. Можно ли допустить, что N—1 зерен не есть куча, а N — куча? Однако, если нельзя установить грань, то невозможно понять, что означает куча зерна. Существуют различные аналоги этого софизма, например временной — в какой момент юноша становится взрослым?

Можно было бы считать, как заявил Борель о софизме, что это словесная игра, что с помощью подходящих прилагательных различимы маленькая, средняя, большая кучи, однако, так как число прилагательных конечно, трудность этим не снимается. В общем, «. . .хотя софизм кучи зерна выглядит несерьезно, в действительности он,

---

* Эти данные заимствованы из кн.: *Литлвуд*. Дж. Математическая смесь. М., ФМ., с. 116—121. Литлвуд не обсуждает вопроса, о котором говорит Борель, и придерживается «старой» терминологии «не невозможно». Интересно, что редактор книги «Вероятность и достоверность» — Б. В. Гнеденко, сделавший в примечаниях к ней несколько критических замечаний, не высказал возражений относительно указанных Борелем в предисловии и развиваемых им в тексте соображений о невозможности крайне маловероятных событий.

** *Борель Э.* Вероятность и достоверность, с. 109.

подобно другим софизмам, завещанным нам древнегреческими философами, ставит важные и всегда актуальные проблемы».*

В двух работах: «Континуум в математике и физике» [115] и «Экономический парадокс — софизм кучи зерна и статистические истины» [103] Борель высказал ряд интересных соображений об упомянутом софизме.

Обсуждая различные модификации софизма, в частности его экономические интерпретации, и указывая различные подходы решений — административное (единовластный выбор числа N; кстати, не следует недооценивать психологическое значение подобного решения) решение, основанное на тех или иных геометрических или эстетических соображениях, если они соответствуют рассматриваемой ситуации, Борель считает наиболее разумным общий подход, основанный на статистических соображениях (критерий: $p=\frac{m}{n}>\frac{1}{2}$, где n — количество опрошенных экспертов, m — число тех из них, кто считает N наименьшим числом, определяющим кучу). Из конкретных вопросов, рассмотренных Борелем в связи с софизмом кучи зерна, наиболее интересным представляется вопрос о колебаниях цен, в частности о влиянии колебания оптовых цен на розничные.

Физическая непрерывность. Согласно Пуанкаре, понятие физической непрерывности сводится к допущению, что одновременно могут иметь место соотношения:

$$A=B,\quad B=C,\quad A>C. \tag{1}$$

Иными словами, мы не можем отличить A от B, B от C, но все же в праве сделать заключение, что A больше C**.

Какова бы ни была техника наблюдений, всегда будет существовать некоторый минимум разрешающей способности, ниже которого разница между A и B настолько мала, что она не ощущается, и можно заключить, что $A=B$, точно так же B и C кажутся равными, однако разница между A и C достаточно велика, чтобы ее можно было

---

* Там же, 84.

** «В свое время я высказал некоторые соображения против этого определения, на которые Пуанкаре не ответил, и это позволяет думать, что он с ними согласился» (*Борель Э.* Вероятность и достоверность, с. 88)

ощутить и заключить, что $A > C$. Пусть речь идет о сравнении веса некоторых шаров. По поводу только что изложенного Борель в статье [115] высказал следующее возражение: «Но в таком случае нам легко сделать вывод, что шар B, который казался нам равным A, тоже больше C. Действительно, если $B < C$, то разность $A-B$ должна быть больше разности $A-C$, положительность которой была установлена, т. е. мы должны были бы обнаружить, что $A > B$, а не только, что $A=B$. Равным образом, из того, что B показалось нам равным C, следует, что B меньше A, ибо если бы B было больше A, то обнаружилось бы, что B больше C, но не $B=C$. Иными словами, если опытным путем установлено (1), то отсюда логически следует без новых опытов, что $A > B > C$».

Таким образом, возможно, имея, например, большое число шаров, близких по весу, выявлять сравнительно малые различия в весе, используя результаты большого числа попарных их сравнений. В основе названного софизма лежит то обстоятельство, что если для нас не ощутима добавка одного зерна, то мы не ощутим и добавления любого числа зерен. В действительности же мы не имеем права, даже оставаясь в пределах разрешающей способности наших инструментов, переносить в область физики заключение: если $f(n)=C$, $n=1, 2, \ldots$, то $f(n)=C$ при $n \to \infty$.

После рассмотрения физической непрерывности Пуанкаре со статистической точки зрения Борель, несмотря на приведенное выше его критическое замечание, заключает: «Формула Пуанкаре не только дает единственное логическое разрешение софизма кучи зерна, но и показывает, что этот софизм позволяет выявить фундаментальное свойство экспериментального понятия — физической непрерывности».*

Нормальные числа и десятичные разложения. Соображения, о которых будет идти речь ниже (неограниченный запас информации, содержащейся в алфавитных разложениях), являют собой яркий образец фантазии Бореля.

---

* *Борель Э.* Вероятность и достоверность, с. 88. Рассматриваемые здесь соображения связаны и с более общими вопросами, см., например: *Яновская С. А.* Преодолены ли в современной науке трудности, известные под названием «Апории Зенона». — В кн.: Методологические проблемы науки. М., «Мысль», 1972, с. 214—233 (особенно, с. 227—232).

Но сначала поговорим о фактах, таящих в себе немало интересного и относящихся к бесконечным десятичным дробям. Приведем их популярное изложение, минуя пока мемуар Бореля [112], в котором содержится обоснование излагаемых выводов.

Предположим, что нужно определить десятичное разложение какого-либо числа ξ, содержащее бесконечное множество случайно выбираемых знаков после запятой. Выборки считаются независимыми друг от друга, и появление любой цифры $0, 1, \ldots, 9$ одинаково вероятно, $(1/10)$. Ясно, что невозможно произвести все эти выборки, но условимся представить, что их число неограничено. Возьмем n первых цифр разложения числа ξ и пусть среди них будет m семерок. Согласно закону больших чисел в форме Бернулли, при $n \to \infty$ частота m/n появления семерки стремится, по вероятности, к $1/10$ (и аналогично для любой другой цифры). Тот же вопрос можно поставить относительно появления в разложении числа ξ сочетания цифр, например 35. Вероятность появления 35, в силу независимости выборок, равна $1/100$, и опять-таки, в силу закона больших чисел, отношение m/n, где n — число всех соседних пар цифр, а m — число пар 35, стремится, по вероятности, к $1/100$. До сих пор речь шла о числе ξ, десятичное разложение которого следует случайно. Возьмем теперь уже не случайное, а вполне определенное иррациональное число x, например $\sqrt{2}$. Согласно Борелю [112], число x нормально по базису 10, если предельная при $n \to \infty$ частота цифр его разложения, равно как и сочетаний из произвольного числа цифр его десятичного разложения, следует тому же закону, что и для чисел, цифры которых в десятичном разложении выбраны случайно, т. е. равна $1/10$ для одной цифры, $1/100$ — для сочетания двух цифр и т. п.

Вообще, число $x \in [0, 1]$ называется нормальным по базису g, если частота каждой цифры в разложении x по базису g одна и та же $\left(\frac{1}{g}\right)$. Число x называется нормальным, если оно нормально при разложении по любому базису.

Как показал Борель [112], на любом отрезке $a < x < b$ абсолютно нормальные числа образуют множество полной меры, т. е. мера этого множества равна $b-a$. Не уменьшая общности, можно ограничиться отрезком $(0, 1)$, и, таким

образом, вероятность (мера) того, что наугад выбранное на этом отрезке число x окажется нормальным, равна единице. Но замечательно то, что определить, является ли заданное число нормальным, исключительно трудно. Аналогичное обстоятельство в математике было известно ранее: множество всех трансцендентных чисел имеет мощность континуума — эквивалентно мощности всех вещественных (и комплексных) чисел. Вместе с тем хорошо известно, ценой каких усилий крупных аналитиков XIX в. были получены доказательства трансцендентности чисел e и π, а, например, доказательство трансцендентности числа $2^{\sqrt{2}}$ было получено лишь в 30-х годах А. О. Гельфондом.

Для нормальных чисел подобные результаты, насколько нам известно, и после Бореля получены не были. Сам он ограничился лишь интуитивными соображениями. Трудность распознавания нормальных чисел Борель, в частности, усматривал в том, что человеческому разуму, как он полагал, фактически недоступно имитировать случай. Борель полагал также, что все просто определяемые числа, за исключением рациональных, нормальны. Так, например, по его мнению, обстоит дело с числами $\sqrt{2}$, π, e. «Строгое доказательство этого факта было бы одним из самых блестящих достижений в исследовании свойств чисел, но это доказательство, по-видимому, очень трудно. Действительно, не видно никаких оснований для того, чтобы определенная цифра десятичной системы была в особом положении по отношению к таким числам, как $\sqrt{2}$, π, e. Эти числа были вычислены с большим количеством десятичных знаков, и рассмотрение полученных цифр подтверждает, что отклонения частот цифр от их среднего значения находятся в пределах, которые следовало бы ожидать при случайной выборке.»* Борель, конечно, отдавал себе отчет, что вероятностный анализ соответствующих разложений должен опираться на статистику зависимых событий, поскольку априорное задание числа x при выбранной системе счисления (в данном случае десятичной) однозначно индуцирует цифры разложения x, и речь, в сущности, идет о статистическом анализе детерминированного явления.

---

* *Борель Э.* Вероятность и достоверность, с. 62.

В этой связи следует назвать две более поздние заметки Бореля, примечательные не столько результатами, сколько постановкой вопросов и проливающие дополнительный свет на его интерес к десятичным разложениям иррациональностей. Первая из них «О десятичном разложении $\sqrt{2}$ и о некоторых проблемах зависимых событий» [289] строится на базе публикации Рене Кастелем* первых 1037 цифр разложения числа $\sqrt{2}$.

Борель с удовлетворением констатирует, что данные Кастеля находятся в очень хорошем соответствии с его гипотезой о нормальности числа $\sqrt{2}$: частота каждой из цифр в разложении $\sqrt{2}$ оказалась очень близкой к $^1/_{10}$, и добавляет: «Но это не значит непременно, что бесконечная последовательность цифр обладает всеми свойствами случайной последовательности. Последовательность цифр $\sqrt{2}$ подчиняется определенному закону, поскольку она определена. . . В этой связи естественно спросить, закон последовательного чередования этих цифр, не является ли он менее иррегулярным, нежели наугад написанная последовательность целых чисел?» [289, с. 590].

Используя выборки из публикации Кастеля, разбивая разложение на 5 групп по 200 цифр, Борель средствами элементарного статистического анализа обнаруживает, что дисперсия разложения $\sqrt{2}$ анормальна (с небольшим завышением). В заметке нет формул. Вероятно, Борель имеет в виду коэффициент дисперсии Лексиса.

По-видимому, под влиянием Бореля статистикой десятичных разложений заинтересовался фон Нейман, который в связи с публикацией в США таблиц π и, соответственно, с 2000 и 2500 знаками высказал по этому поводу ряд соображений. Борель немедленно откликнулся на них работой «О десятичных значениях e и π» [295]. Вот ее начало: «. . . фон Нейман заметил, что среднее квадратическое отклонение для первых 2000 цифр разложения числа e слабо анормально, в то время как оно нормально для числа π. Этот результат меня очень заинтересовал, так как он оправдывает допущение, которое я сделал относительно $\sqrt{2}$, что некоторые обнаруженные особенности этих разложений носят, хотя и случайный,

* *Castel R.* Compte Rendue Acad Sc., 1950, 230, 431—432.

но более регулярный характер. . .» [295, с. 1973]. Однако некоторые выводы фон Неймана представляются Борелю преждевременными и до появления еще более подробных таблиц он предпочитает занимать осторожную позицию.

Более существенными, чем эти заметки Бореля, являются совпадающие с ними по времени его интересные статистические тесты некоторых классических проблем теории простых чисел.

Алфавитная нумерация. Очевидно, что невероятно трудно охватить ту или иную закономерность необозримо большой последовательности цифр, если не считать последовательности специального вида, например периодические с небольшим числом цифр в периоде. В силу этого Борель предлагает, наряду с десятичной (двоичной, . . .) системой счисления (нумерацией), рассматривать нумерации алфавитные. Условимся выбрать систему счисления, скажем, с основанием 26 — по числу букв латинского алфавита. При этом A соответствует нулю, B — единице, . . . Z — числу 26. Тогда, пренебрегая интервалами между словами и знаками препинания, всякий французский текст можно рассматривать как некое число. Можно, впрочем, учесть и то и другое, увеличивая базис системы счисления, скажем, с 26 до 35, но Борель этого не делает.

Алфавитная нумерация особенно интересна тем, что, например, последовательность в миллион букв, составляющая книгу, имеет «свое лицо», и ее можно отличить от другой столь же громадной последовательности, образующей книгу или неосмысленной. Человек, даже не обладающий исключительной памятью, может, в конце концов, выучить наизусть или восстановить по памяти целый том, особенно если это том стихов (Валерий Брюсов, например, утверждал, что он может восстановить любое поэтическое произведение Пушкина), тогда как даже феномены памяти не могут мечтать о запоминании ста тысяч цифр. Конечно, возможности ЭВМ вносят очевидные коррективы в эти слова, но главное, что Борель имеет в виду, — это связь алфавитной нумерации с понятием нормального числа.

Итак, примем гипотезу Бореля, что число π — нормальное. Впрочем, последующее относится к любому нормальному числу.

Несложный расчет * показывает, что если задать какую-либо последовательность, состоящую из миллиона букв, то вероятность того, что в алфавитном разложении числа найдется эта последовательность, представляет собой приближенно число, заключенное между 10^{-14} и 10^{-15}. Хотя эта вероятность ничтожно мала, но, поскольку π — иррациональное число и, значит, разложение неограничено, можно допустить, что в нем выбранная последовательность 25 букв встретится не один, а даже бесконечное число раз. Итак, алфавитное разложение π содержит, даже без перехода к бесконечной последовательности всех его знаков, все книги, написанные на французском языке или любом другом языке с тем же алфавитом. Очевидно, что в этом разложении будут содержаться тексты всех книг, которые еще только когда-либо будут написаны. Между этими текстами, разумеется, будут и бесчисленные последовательности текстов, лишенных смысла. Но последние не будут бесконечными, между ними будут слова, фразы, имеющие смысл. Подчеркнем, что не обязательно осмысливать все разложение π. Достаточно взять, скажем, 10^{25} первых его цифр, чтобы быть уверенным в том, что при этом где-либо один за другим обнаружатся тексты всех книг библиотеки в 300 000 томов. Таково несравненное богатство, заключенное в числе π.

Называя это чудом математики и указывая, что сейчас (1950 г.) ученые еще очень далеки от того, чтобы иметь возможность получить столько знаков разложения π и видеть это чудо свершившимся, Борель, однако, не медлит рассеять в глазах читателя этот созданный им информационный мираж. Если вообразить себе сверхчеловека, существо, способное охватить целиком алфавитное представление настолько, чтобы найти в нем, скажем, «Сида» Корнеля, то оно найдет заодно столько других разных и странных текстов, что ему легче было бы самому создать произведение, не уступающее шедеврам, чем выделить шедевры из огромного числа посредственных или нелепых текстов.

Увлекшись нарисованной им картиной, Борель забывает пояснить, почему все-таки в разложении π, как он утверждает, непременно встретится любой наперед задан-

---

* *Борель Э.* Вероятность и достоверность, с. 63.

ный текст. Будем предполагать, что он состоит из миллиона букв, и назовем его условно «Шекспир». «Непременно» здесь следует понимать в вероятностном смысле, с вероятностью, сколь угодно близкой к единице. Утверждение вытекает из распределения Пуассона вероятностей крайне редких событий при очень большом числе независимых опытов. Если вероятность p события в одном опыте равна $\frac{\lambda}{n}$, то вероятность p_m его появления m раз при n независимых опытах, когда n — очень велико, асимптотически равна $e^{-\lambda}\frac{\lambda^m}{m!}$ (здесь λ — параметр распределения).

Вернемся к рассуждениям Бореля. Для вероятности сочетания «Шекспир» приближенно было получено $10^{-15}<p<10^{-14}$. Примем меньшее значение 10^{-15}. Вообразим последовательность 10^{15} наборов по 10^{15} букв и будем исходить из распределения Пуассона (при $\lambda=1$). Зададим крайне малое $\varepsilon>0$ и выберем m так, чтобы

$$\sum_{\gamma=m}^{\infty}\frac{1}{\nu!}<e\varepsilon.$$

Тогда вероятность того, что «Шекспир» появится не менее m раз, будет больше $1-\varepsilon$.

В итоге Борель делает следующий вывод. В том с виду весьма отчетливом представлении, которое составили себе математики относительно неограниченной последовательности целых чисел, есть немало иллюзорного.

В этой последней фразе заключена мысль о недоступных числах, что естественно связано с конструктивным подходом Бореля к математическим объектам, с его требованиями их реальной обозримости. На разграничении реального и иллюзорного Борель, как мы увидим, настаивал и в своих физических работах.

Статистическая механика. К вкладу Бореля в прикладную теорию вероятности примыкают его работы по статистической механике: мемуар «О кинетической теории газов» [96], заметки «Статистическая механика и необратимость» [150], «Арифметические и аналитические модели необратимости» [137] и, наконец, содержательная книга 1924 г. «Классическая статистическая механика» [210]. Не нужно преувеличивать значение этих работ, равно как и работ по математической генетике (см. ниже),

для ученого такого масштаба, как Борель. Но в них все же содержались некоторые оригинальные идеи, хотя и во многом оставшиеся незавершенными.

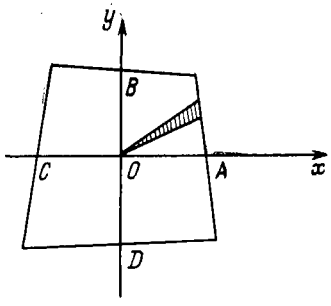


Рис. 3. К задаче об установившемся движении в статистической механике.

Мемуар [96] представлял собой попытку математика логически осмыслить некоторые основные идеи статистической механики. В первой его подготовительной части Борель формулирует несколько вероятностных задач теории динамических систем с небольшим числом степеней свободы, основной из которых представляется следующая. Пусть в трехмерном пространстве R задана область D с границей D'. В этой области движется точка P, не подверженная действию внешних сил и отражающаяся от D' по классическому закону. Скорость точки P, таким образом, постоянна по величине и, значит, может быть изображена в виде точки Q на сфере S. Каков при этом закон распределения точки Q при случайном задании границы D'?

Простейшая конкретная ситуация, для которой Борель рассматривает эту задачу, такова. Пусть граница области D задана равенствами:

$$x = a + \varepsilon_1 y, \quad x = -a + \varepsilon_2 y,$$
$$x = a + \varepsilon_3 y, \quad x = -a + \varepsilon_4 y,$$

где $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_4$ — независимые между собой случайные величины со значениями, сосредоточенными на фиксированном отрезке $(-\varepsilon, \varepsilon)$; a — постоянная величина.

Борель предполагает, что $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_4$ распределены равномерно, но он не использует этого обстоятельства. Пусть в начальный момент времени точка P выходит из положения O со скоростью v_0 (рис. 3). Направление OP — случайная величина со значениями на $(-\varepsilon, \varepsilon)$.

Доказывается, что при $t \to \infty$ распределение точки Q на окружности S равномерное. Борель рассматривает (именно рассматривает, а не доказывает) и другие случаи, когда предельное распределение точки Q на сфере S равномерное.

Анализируя затем систему из n одинаковых частиц, имеющих скорости $v_1, v_2, \ldots, v_n$, и исходя из того, что кинетическая энергия системы постоянная:

$$v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2 = nk^2, \quad k = \text{const} \tag{2}$$

и $(v_1, \ldots, v_n)$ — случайная точка, равномерно распределенная на сфере (2), Борель показывает, что при $n \to \infty$ каждая координата v_k асимптотически нормальна с параметрами (o, k) и при фиксированном m любые m составляющих вектора $v_1, \ldots, v_n$ асимптотически независимы между собой. Этот результат, по существу, уже задолго до этого известный Максвеллу, можно рассматривать как строгое обоснование его законов распределения скоростей идеального газа.

В работе [137] Борель на основе введенной им правой и левой средней производной строит функцию, обладающую свойствами функции Больцмана в статистической механике.

Пусть газ рассматривается как система N материальных точек, имеющих, соответственно, скорости $\vec{V}_1, \ldots, \vec{V}_n$. Пусть $\vec{V}$ — вектор $3N$-мерного фазового пространства $(V_1, \ldots, V_N)$ и пусть $f(\vec{V}, t)$ — плотность распределения вектора $\vec{V}$ в момент t, т. е. вероятность того, что в этот момент $\vec{V}$ заключено в пределах от $\vec{V}$ до $\vec{V} + d\vec{V}$, равна $f(\vec{V}, t)\, d\vec{V}$.

Исследование вопросов, связанных с функцией f, составляет основную задачу кинетической теории газов. В первом приближении функция f удовлетворяет весьма сложному интегродифференциальному уравнению Больцмана. При этом делается допущение о том, что газ находится в состоянии молекулярного хаоса. В момент t газ находится именно в таком состоянии, если плотность вероятности обнаружения молекулы со скоростью $\vec{V}$ и молекулы со скоростью $\vec{V}_1$ равна $f(\vec{V}, t) \cdot f(\vec{V}_1 t)$. Функция Больцмана H определяется равенством:

$$H = \int f(\vec{V}, t) \ln f(\vec{V}, t)\, d\vec{V}.$$

В момент, когда происходят столкновения между молекулами, для нее имеют место неравенства:

$$H'(t+0) < 0, \quad H'(t-0) > 0,$$

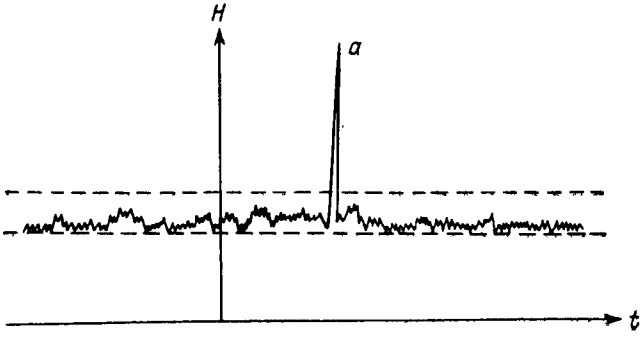


Рис. 4. Приближенный график функции Больцмана.

т. е. имеется локальный максимум. Поскольку интервалы времени между столкновениями молекул невообразимо малы, максимумы на любом временном отрезке будут столь часты, что график функции H реально изображен быть не может, что и оправдывает попытки построения идеализированной модели φ больцмановской функции H (рис. 4).

С этой целью Борель вводит понятия правой и левой средних производных функции $\varphi(t)$ в точке t_0:

$$D^d\varphi(t_0) = \lim_{t_1 \to t_0} \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} \psi(t, t_1)\, dt, \quad D^g\varphi(t_0) = \lim_{t_2 \to t_0} \frac{1}{t_0 - t_2} \int_{t_2}^{t_0} \psi(t, t_2)\, dt,$$

$$\psi(t, u) = \frac{\varphi(t) - \varphi(u)}{t - u}.$$

Мы не будем воспроизводить тонкое, но громоздкое построение модели Бореля,* назовем лишь свойства функции φ: 1) она непрерывна и ни в одной точке не имеет обычной производной; 2) средние производные ее всюду, кроме множества меры нуль, равны нулю. В точках, где они не равны нулю, правая средняя производная равна $-\infty$, левая равна ∞, что, по определению Бореля, называется максимумом вообще.

* Оно основано на принципе сгущения особенностей и до некоторой степени напоминает пример Ван дер Вардена непрерывной функции, не имеющей нигде производной, но не совпадает с этим примером.

Подробности относительно функции φ см. в [137], где, однако, доказательства опущены. Были ли они опубликованы, нам неизвестно.

Из свойств H-функции Больцмана следует, как это было им показано, опровержение парадокса необратимости, сформулированного Лошмидтом (1876 г.). Этот парадокс, как известно, заключается в следующем. Уравнения механики, из которых путем усреднения получаются термодинамические величины, инвариантны относительно изменения знака времени. Но законы термодинамики этим свойством не обладают: тепло переходит от более нагретого тела к менее нагретому, энтропия замкнутой системы возрастает (второе начало термодинамики).

В работе [150] Борель предложил объяснение парадокса необратимости, основанное на иных соображениях. Его отправной пункт: точное численное значение физической величины — математическая абстракция, которой не отвечает никакая реальность. Пусть газ рассматривается как система N точек и пусть заданы гамильтоновы уравнения этой системы. Считается, что в принципе положение системы в момент t однозначно определяется заданием начальных данных — ее положения в момент t_0. Но положение системы в момент t_0 не может быть точно задано и, следовательно, не может быть точно задано ее положение в момент t. Этим самым настоящее оставляет неопределенным будущее, но нельзя говорить о неопределенности прошлого. Таким образом, парадокс Лошмидта опровергается физической невозможностью реализации инвариантности положения системы при изменении знака времени.

Но Борель идет дальше. В силу тех же соображений он высказывается против такого фундаментального положения статистической механики, как теорема Лиувилля о сохранении фазового объема. «Если силы, действующие на движущуюся точку, параметры, относящиеся к препятствиям (стенки сосудов, их геометрическая форма. . .) заданы не абсолютно, а приближенно, то это скажется на фазовой области D_t, возникающей из начальной области D_{t_0}. При этом теорема Лиувилля не имеет места — фазовый объем становится менее плотным, но бóльшим, расплывается», что и показывает Борель на частных примерах. «Это, — говорит он о теореме Лиувилля, — очень интересное с математической точки зрения пред-

ложение, но мне кажется, что убывание со временем соответствующих ячеек фазового объема лишает ее физического смысла в рамках классической механики. Сохранение величины фазового объема, таким образом, чистая абстракция» [150, с. 195].

В своей книге по статистической механике [120], вышедшей значительно позднее (1924), Борель проводит подробное исследование конкретных случаев деформации фазовых областей, но он уже не решается атаковать теорему Лиувилля. Быть может, это явилось следствием его бесед с известным физиком-теоретиком Ж. Перреном, о которых Борель говорит в предисловии к книге. В целом это сочинение, содержащее, наряду с равновесной механикой, также компактное и ясное изложение кинетической теории, включая вывод уравнения Больцмана, не утратило интереса и в наши дни.

Генетика. В работах «Генетика — определения и проблемы» [262], «О некоторых проблемах генетики, связанных с проблемой разорения игроков» [263] Борель намечает построение игровых моделей в популяционной генетике. Предлагаемая им схема такова.

Рассматривается множество E элементов, называемых живыми индивидуумами определенного типа — особями. Эти индивидуумы умирают с определенными вероятностями, указанными в известных таблицах смертности. Число элементов φ множества E (популяция) естественно является функцией времени. Можно считать, что E находится в состоянии нормальной эволюции, если эта функция в течение некоторого периода имеет вид:

$$\varphi(t) = Ae^{at},$$

где a — константа любого знака, причем $|a|$ — невелико, а A — функция от t, которую можно понимать как математическое ожидание $M\xi(t)$ некоторой случайной функции $\xi(t)$.

По определению эволюция E циклическая, если значения $\varphi(t)$ за короткий промежуток времени претерпевают быстрые осцилляции в окрестности нуля.

Каждый индивидуум H из E состоит из $2n$ элементов — хромосом, объединенных в пары. Хромосомы каждой пары, например A_1 и A_2, могут принадлежать большому числу типов $A_1 \ldots, A_k$. Пары хромосом, называемые родительскими, делятся на две подкатегории — мужские M и жен-

ские F. Индивидуумы H называются мужскими, если они имеют одну хромосому M и одну хромосому F, они называются женскими, если имеют две хромосомы F. Никакой индивидуум не имеет двух хромосом M.

M и F порождают потомка D по следующей схеме. Пусть A_1 и A_2 — хромосомы категории A в M и пусть A_3 и A_4 — хромосомы той же категории A в F. Выбирают случайно одну из хромосом A_1 или A_2 (например, A_1) и одну из хромосом A_3 или A_4 (например, A_4). Хромосомы категории A в D, таким образом, будут A_1 и A_4. Эту процедуру повторяют для всех категорий A, и D определено.

Применительно к родительской паре, как легко видеть, это означает, что потомок D имеет одинаковую вероятность быть типа M или F, и в следующем поколении количество особей M и F примерно одинаковое.

Предположим, что особи H воспроизводятся за период T их жизни. Каждое H имеет ν потомков, где ν — одно из чисел $0, 1, \ldots, k$. Считая, что вероятности равенств $v=0, 1, \ldots, k$, соответственно, $p_0, p_1, \ldots, p_k$, имеем $p_0+p_1+\ldots+p_k=1$. Для математического ожидания λ числа потомков имеем:

$$\lambda = p_1 + 2p_2 + \ldots + kp_k.$$

Константа a нормальной эволюции связана с λ равенством:

$$2e^{aT} = \lambda.$$

Особи возрастов от 0 до T лет составляют поколение — потомков особей возраста от T до $2T$ лет и т. д.

Рассмотрим для упрощения постоянную популяцию ($\lambda=2$, $a=0$). Каждое H имеет в среднем двух потомков, каждый из которых также в среднем имеет двух потомков, и т. д. (2^m потомков в m-м поколении). Точно так же каждое H имеет в среднем двух предков, 2^m в m-м поколении.

Мы видели, что каждое H передает каждому из своих потомков половину своих хромосом, выбранных случайно. Таким образом, может случиться так, что один из потомков какого-либо следующего поколения не будет иметь ни одной хромосомы одного из своих генеалогических предков. Мы сохраним термин биологический потомок для тех, кто будет иметь хоть одну хромосому своего предка.

Каждое H, имея всего $2n$ хромосом, обладает в любом поколении самое большее $2n$ биологическими предками.

Сказанное приводит, в частности, к следующим вопросам. Какова вероятность того, что некоторое определенное H в ν-м поколении будет иметь N генеалогических потомков. Такой же вопрос, но по существу более интересный, ставится для биологического потомка особи H. Он может быть уточнен: какова вероятность наличия у потомка хромосомы A_1?

Названные задачи имеют большую аналогию с классическими задачами о разорении игрока, рассматривавшимися еще в XVIII столетии для безобидных и небезобидных игр (для первых $\lambda=2$, для вторых $\lambda > 2$). В частности, интересно знать вероятность того, что хромосома A_1, существующая у H, не переходит ни к одному потомку. Эта вероятность является, очевидно, функцией от a, λ и $p_0, \ldots, p_k$.

Борель формулирует и несколько более трудную проблему. Например, популяция E делится на несколько частей $E_1, \ldots, E_m$, имеющих разный характер репродуцирования. Вероятность скрещивания особей одной части гораздо больше вероятности скрещивания особей разных частей. Для некоторых частей $\lambda < 2$, для некоторых $\lambda > 2$. Каковы вероятности того, чтобы в некотором поколении потомков существовали хромосомы какого-либо E_α? Можно, например, допустить, что при скрещивании особей разных E_α действуют законы Менделя относительно доминантных признаков.

Намечая свою игровую модель, Борель [263] рассуждает так. Условимся, что каждый рождающийся потомок (как и каждая его хромосома) участвует в игре, располагая капиталом в одну единицу. Если он умирает, не оставляя потомства, он разорен, если в следующем поколении у него k потомков, его капитал равен k (выигрыш $k-1$). Он продолжает игру, играя последовательно, или, что то же, одновременно k партий, от общего результата которых зависит его капитал (т. е. число его наследников) в следующем поколении, и т. д.

Если обозначим через p_k вероятность того, что число потомков равно k, мы имеем:

$$p_0 + p_1 + \ldots + p_k = 1,$$
$$p_1 + 2p_2 + \ldots + kp_k = \lambda.$$

В случае, когда численность популяции остается постоянной, для биологического потомства одной хромосомы

$\lambda=1$, для генеалогического — $\lambda=2$. Вероятность того, что потомство вымрет, равна наименьшему корню уравнения:

$$x=p_0+p_1x+p_2x^2+\ldots+p_kx^k.$$

Это уравнение всегда имеет два вещественных положительных корня, один из которых 1, другой — меньше или больше единицы в зависимости от того, больше или меньше 1 число λ.

Как утверждает Борель, после некоторых дополнительных рассуждений, которые мы опускаем, предложенный им подход довольно точно соответствует картине распределения численности наследных поколений в городах с медленным приростом населения, смешивающихся с сельскими популяциями, отличающимися более высоким приростом.

К близким вопросам относится более поздняя заметка «О передаче наследственных признаков» [298]. Как замечает Борель, полученные в ней равенства позволяют вычислить частоты различных фамилий в городах, а также изменения этих частот в условиях миграции населения.

Следует отметить, что относящиеся к генетике работы Бореля, как и многие другие его работы позднего периода, носили изолированный характер и не содержали литературных ссылок. А между тем к тому времени популяционная генетика уже имела важную предысторию, одним из исходных пунктов которой явилось открытие в 1908 г. Харди совместно с Вайнбергом математического выражения феномена свободного скрещивания.

«*Вероятности и г-н ле Дантек*». Не лишена интереса дискуссия Бореля—ле Дантека по поводу закона больших чисел.

Феликс ле Дантек, работавший одновременно с Борелем в Коллеж де Франс, был крупным биологом-теоретиком, много сделавшим для внедрения физико-химических методов в биологические дисциплины. Он владел математическим анализом, статистическими методами, посвятил большое число работ теории эволюции, где, однако, выступал как неоламаркист, точнее, как сторонник конвергенции ламаркизма с рядом положений дарвиновской теории. Человек независимых и оригинальных взглядов,

ле Дантек в одной из своих книг* критикует понимание Борелем (а в сущности, и математиками вообще) закона больших чисел, изложенное в книге [111]. По этому вопросу между ними уже и ранее велась дискуссия. Они обменялись рядом писем, но не пришли к согласию. В связи с этим Борель решил выступить в печати с разъяснениями ле Дантеку, что было сделано им в статье «Вероятность и г-н ле Дантек» [129].

Закон больших чисел, как известно, гласит: при достаточно большом числе независимых испытаний с вероятностью, сколь угодно близкой к достоверности, следует, что отношение числа появлений события к числу испытаний будет сколь угодно близко к средней арифметической вероятности события. В случае, когда вероятность события в каждом опыте постоянна p, среднее арифметическое совпадает с p. Именно такой простейший случай, когда $p=1/2$, опыт — игра в орлянку, событие — появление герба, имеется в дальнейшем в виду. Кажущаяся простота закона больших чисел, поскольку число испытаний предполагается неограниченным, в некоторой степени обманчива, и этим объясняются неверные трактовки ряда связанных с ним вопросов. Это, в частности, относится к предмету, обсуждавшемуся Борелем и ле Дантеком, «возможности» неограниченного накопления выигрыша каждой из сторон. «. . .вопрос этот тонкий и мало известный, — говорит Борель, — так что будет небесполезно войти в некоторые подробности».**

Цитируя свою книгу [111], Борель не без иронии замечает: «. . . в вероятностных рассуждениях некоторые умы имеют недоверие к логическим выводам и предпочитают им доводы чувств. Недавно мне пришлось констатировать эту склонность у одного из наиболее просвещенных умов нашего времени, хорошо известного своими научными и философскими трудами, к тому же имеющего весьма серьезную математическую подготовку. Мне тогда же показалось, что не следует относиться к этим тенденциям с тем пренебрежением, которое с полным правом мог бы

---

* *Дантек Ф.* Хаос и мировая гармония. Русск. перевод В. Кривской. СПБ, 1912. На русский язык переводились и другие книги ле Дантека. О нем см.: *Назаров В. И.* Эволюционная теория во Франции. М., «Наука», 1967.

** Эта и все последующие ссылки на работы [111, 129] содержатся в книге: *Борель Э.* Случай. М., ГИЗ, 1923, с. 24—37.

проявить математик, считая совершенно излишним убеждения, раз его рассуждения безупречны».

Интересно, что тогда же (1910—1912 гг.) имела место примечательная дискуссия о законе больших чисел между А. А. Марковым и А. А. Чупровым. Выдающийся вклад Маркова в теорию вероятностей общеизвестен. Чупров являлся одним из самых авторитетных специалистов по математической статистике своего времени. Тем не менее Марков обвинял Чупрова в непонимании закона больших чисел, что, кстати, подтверждает слова Бореля: «. . .вопрос этот тонкий. . .». «Я считаю своим долгом высказаться решительным образом в печати против того отношения к основным положениям исчисления вероятностей и к его теоремам, какое установлено в вашей книге»,*— писал Марков** Чупрову в ноябре 1912 г. «Основным объектом теории вероятностей, — указывал Марков в вышедшей затем его статье, — служит вероятность событий при отдельном испытании, если нет этой вероятности, то нет и закона больших чисел. Между тем, в „Очерках" мы находим упорное стремление установить, что такой вероятности нет, и на стр. 203 прямо сказано: „. . .целесообразно признать, не играя словами, что с единичным случаем ни вероятность, ни закон больших чисел не имеют дела"».***

Из ответа Чупрова, который исключительно почтителен, не в пример ле Дантеку, куда более агрессивному: «Хотя я и со многим не согласен, но не могу не признать Вашу критику изложенной у меня теории устойчивости наиболее глубокой и принципиальной из всего, что мне довелось за это время выслушать****. . .».

Подобный же упрек, что и Марков (игнорирование вероятности отдельного события), сделал Борель ле Дантеку, и, вообще, параллель обеих дискуссий представляется правомочной, хотя и условной, ибо критика Маркова все же носила скорее методологический характер —

---

* Имеется в виду книга: *Чупров А. А.* Очерки по теории статистики. СПб., 1910; последнее ее издание вышло в 1959 г.

** Переписка А. А. Маркова и А. А. Чупрова. О теории вероятностей и математической статистике. М., «Наука», 1977, письмо 35, с. 54.

*** Там же. Об основных положениях теории вероятностей и о законе больших чисел. Приложение I.

**** Там же, письмо 36.

у него не было сомнений в глубине и правильности понимания Чупровым существа дела. В рассуждениях же ле Дантека, как показал Борель, были существенные пробелы. Вместе с тем центр тяжести дискуссии французских ученых лежал в другой плоскости — в указанном Борелем парадоксе простейшей игровой ситуации.

Вернемся к статье Бореля [129] и непосредственно к его словам, которые критиковал ле Дантек: «Предположим, что последовательно разыгрывается очень большое число партий в орлянку и в каждый момент будет известен выигрыш или проигрыш игрока, все время ставящего на решетку, если ставки одинаковы для каждой из партий. Если произвести этот опыт на самом деле, то легко убедиться, что после некоторого числа партий, редко превосходящего 100 и почти никогда 1000, выигрыш и проигрыш сводятся к нулю; при таком положении имеется один шанс из двух на выигрыш следующей партии; если это случится, мы скажем, что совокупность сыгранных партий составляет хорошую серию; если выигрыша не будет, мы будем продолжать игру до нового возвращения к нулю, и тогда снова будет один шанс из двух — выиграть следующую партию, и в случае выигрыша у нас снова будет хорошая серия. . .

Теперь предположим, что Павел играет все время с тем же противником Петром неограниченное количество партий; он может, не дожидаясь следующего дня, считать игру прерванной после каждой хорошей серии и начинать новый счет с этого момента; так как моменты игры ничем друг от друга не отличаются, то Павел осуществит, таким образом, неограниченное количество хороших серий и, следовательно, неограниченный выигрыш. . . Но при той же последовательности партий и Петр может рассуждать точно так же; следовательно, его выигрыш также неограничен при условии достаточной продолжительности игры». Указав, что, по его мнению, в рассуждениях Бореля содержится ошибка, ле Дантек продолжает: «Если мы пожелаем обратиться к рассуждениям по здравому смыслу. . ., то увидим, что есть на самом деле моменты, когда выигрыш Петра как угодно велик, и другие моменты, когда выигрыш Павла также как угодно велик. . .».

Ниже воспроизводится кривая (рис. 5) ле Дантека, поясняющая его рассуждения. По оси x отложены номера партий, а по оси y — количество выпадений герба (выигрыш

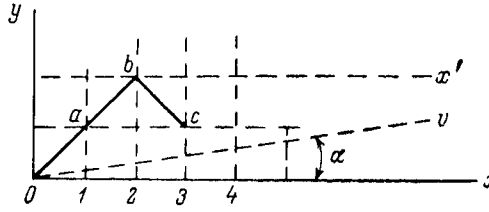


Рис. 5. Кривая ле Дантека.

Петра). «Мы знаем, каков будет общий ход кривой. Это будет ломанная линия, от времени до времени пересекающая ось x, но без всякой правильности в распределении точек пересечения». Памятуя известное выражение Жозефа Бертрана: «Монета не имеет ни сознания, ни памяти», ле Дантек затем с помощью элементарных рассуждений пытается «на пальцах» показать, что отсюда следует закон больших чисел: «. . .отношение отклонения к общему числу сыгранных партий будет всегда очень мало по абсолютной величине». В сноске к этой фразе Борель показывает несостоятельность его вывода («ле Дантек, несмотря на весь свой талант, не может заменить точные вычисления туманными рассуждениями»).

Но прежде, чем предоставить Борелю заключительное слово, приведем еще слова ле Дантека, показывающие, что ему нельзя отказать в остроумии: «Отсутствие закона, благоприятствующего выпадам хотя бы решетки, делает необходимым последовательные встречи кривой с осью x. Если бы кривая вместо того, чтобы быть сколь-нибудь симметричной по отношению к оси x была симметричной относительно другой прямой OV, образующей с осью сколь угодно малый угол α, то существовал бы закон, благоприятствующий преобладающим выпадам решетки, что невозможно; угол α может быть только равен нулю. . . Итак, закон больших чисел, т. е. равенство нулю угла нашего чертежа, представляет собой не что иное, как словесное преобразование выражения, утверждающего отсутствие всякого закона. И тот факт, что некоторые мыслители вывели из этого существование какого-то закона случая напоминает мне шутку из старой оперетты, в которой глава заговорщиков, не видя в назначенное время условного флажка, восклицает: „А не является ли сигналом отсутствие сигналов?“». . .

Борель: «. . . как только задачи на вероятности становятся сколько-нибудь сложными, здравый смысл, даже руководимый светлым и глубоким умом, не может обойтись без помощи вычислений; он ведет самое большее к выводам, правда не ошибочным, но не полным и расплывчатым. . .

. . .общий ход кривой, построенный ле Дантеком, сложнее, чем ему кажется: длинные серии партий, в их совокупности выгодные для одного из играющих, весьма мало вероятны, но при очень продолжительной игре они все же могут появиться и надолго нарушить равновесие; итак, кривая в общем начнет описывать изгибы около оси x, потом она довольно значительно отклонится и тогда будет изгибаться не около наклонной прямой (ле Дантек прекрасно объяснил это), но вблизи одной из параллельных оси x. Это будет продолжаться до тех пор, пока не произойдет нового довольно большого отклонения, которое сможет либо снова привести ее к оси x, либо еще увеличить отклонение. . .».

Математический аспект

Счетные вероятности. Первой работой Бореля по теории вероятностей была заметка «О некоторых вопросах теории вероятностей» [93]. В ней впервые интеграл Лебега и теория меры привлекаются к теоретико-вероятностным вопросам.

Может ли функция Дирихле $y=f(x)$, $0\leqslant x\leqslant 1$, $f(x)=0$ при x рациональном, $f(x)=1$ при иррациональном x, рассматриваться как плотность распределения вероятностей? Борель говорит в начале заметки, что этот вопрос в рамках риманового интеграла не имеет решения, но очевидно, что интеграл Лебега $\int_0^1 f(x)dx$ существует и равен 1. Сформулировав затем основные положения теории меры и отметив, что для измеримого множества $\mathcal{E}\subset(0,1)$ равенство $p=\text{mes}\,\mathcal{E}$ может быть истолковано как вероятность того, что случайная точка на (0, 1) принадлежит множеству $\mathcal{E}$, Борель решает следующую задачу: говорят, что число α соизмеримо до n-го порядка, если существуют два таких натуральных взаимно простых числа p, q, что

$$\left|\frac{p}{q}-\alpha\right|<\frac{1}{q^n},\quad q\geqslant 2,\quad p<q. \tag{3}$$

Какова вероятность p_n того, что взятое наугад число $x\in(0,\ 1)$ окажется соизмеримым до порядка n, $n\geqslant 3$? Ответ гласит

$$p_n=2\sum_{2}^{\infty}\frac{\varphi(q)}{q^n}<2\sum_{2}^{\infty}\frac{q-1}{q^3}=\frac{n^2}{3}\left(1-\frac{\pi}{4}\right),$$

где $\varphi(q)$ — количество простых чисел, меньших q.

Приведенная задача относится к метрической арифметике — дисциплине, в развитии которой Борель имеет особые заслуги. Об этом будет сказано немного позже, а сейчас, несколько нарушая хронологический порядок, познакомимся с его знаменитым мемуаром «Счетные вероятности и их приложения к арифметике» [112]. Этому мемуару Борель придавал большое значение. Он включал его в виде приложения в последние три издания своей книги «Теория функций» [285].

Как говорится в начале мемуара, до сих пор в теории вероятностей рассматривались схемы случайных событий двух видов: 1) множество возможных состояний (исходов опыта) конечное; 2) множество возможных состояний имеет мощность континуума (геометрические вероятности). Цель мемуара — исследовать промежуточный случай, когда это множество бесконечно и счетно. Примем этот довод Бореля, хотя известно, что приведенная им классификация не является полной и в действительности дело обстоит сложнее.

Борель обосновывает такую постановку задачи не только ее важным практическим значением, но и его отрицательным отношением к несчетной бесконечности. Континуум, как множество мощности, большей нежели счетная, представляется ему сугубо негативным понятием; он считает, что счетные множества единственные, которые могут быть эффективно заданы в конкретных случаях.

Вопросы о счетных вероятностях в рассматриваемом мемуаре Борель подразделяет на три типа: 1) число m возможных исходов (опыта) ограничено в каждом опыте, но множество опытов счетное; 2) число исходов опыта

счетное, но число опытов n конечное; 3) число исходов опыта и число опытов счетное.

Случай 1. Для сокращения записи предположим, что опыт может иметь лишь два исхода: «успех» и «неудача», $m=2$, случай любого конечного m не требует новых идей. Пусть вероятность успеха в n-м испытании p_n, $n=1, 2, \ldots$. Ставятся следующие задачи.

1. Какова вероятность того, что не будет ни одного успеха? Обозначив эту вероятность p_0, имеем;

$$p_0 = (1 - p_1)(1 - p_2) \ldots . \tag{4}$$

Отсюда сразу возникает вопрос о сходимости (расходимости) ряда

$$\sum_1^\infty p_n. \tag{5}$$

Если произведение (4), а значит, и ряд (5) сходятся, $p_0 > 0$. Случай, когда некоторые из $p_n = 1$, тривиален и исключается из рассмотрения.

Исходя из (4), Борель вводит функцию:

$$F(z) = (1 - zp_1)(1 - zp_2) \ldots .$$

Если ряд (5) сходится, она оказывается целой. Через коэффициенты ее разложения в ряд по степеням z выражаются некоторые вероятности, которые приводятся ниже.

Уже отсюда видно, что условие сходимости ряда (5) играет особую роль в вопросах о счетных вероятностях. Ясно также, что класс сходящихся рядов (5) так же широк, как и класс всех сходящихся рядов с положительными членами, поскольку любой такой ряд можно нормировать к единице, разделив его на сумму ряда. Таким образом, все многообразие результатов теории рядов с положительными членами имеет, так сказать, вероятностное значение.

В случае расходимости ряда (5) $p_0 = 0$, что, вообще говоря, не означает невозможности события A_0.

2. Какова вероятность P_k того, что число успехов равно k? Если (5) сходится, P_k определяется равенством:

$$P_k = p_0 \sum_1 u_{n_1} \ldots u_{n_k}, \quad u_n = \frac{p_n}{1 - p_n}, \tag{6}$$

где сумма распространяется на все целые $n_1, \ldots, n_k$, причем в каждом слагаемом все $n_1 \ldots n_k$ различны. Если (5) расходится, $p_0=0$, сумма в (6) равна ∞, но, как показывает Борель, $P_k=0$.

3. Какова вероятность P_∞ бесконечного множества успехов? Пусть (5) сходится. Вероятность S любого, но конечного числа успехов:

$$S=p_0+P_1+\ldots=p_0(1+u_1)(1+u_2)\ldots,$$

откуда $S=1$. Так как $P_\infty=1-S$, имеем $P_\infty=0$. Если (5) расходится, $P_k=0$, $P_\infty=1$.

Итак, если (5) сходится, p_0, P_1, ... определены и не равны нулю, $P_\infty=0$. Если (5) расходится, $P_k=0$, $P_\infty=1$.

Случай 2. А) Какова вероятность T_m того, что при m последовательных испытаниях приходят к различным исходам? Здесь $p_1+p_2+\ldots=1$.

Ответ:

$$T_m=m!\sum_1^\infty p_{n_1}p_{n_2}\ldots p_{n_m}$$

(в каждом слагаемом среди $n_1, \ldots, n_m$ нет одинаковых).

Б) Какова вероятность v_m того, что m различных испытаний дают $m-1$ различных исходов? Ответ: $v_m=T_{m-1}-T_m$.

Здесь нам нужно будет временно прервать рассказ об этом мемуаре. Вскоре после его выхода появилась статья Феликса Бернштейна, посвященная приложениям теории меры к одной задаче аналитической механики, в которой автор упрекнул Бореля в том, что в решениях сформулированных выше проблем 1 и 2 Борель не оговаривает независимости событий. Кроме того, по мнению Бернштейна, полученное Борелем равенство $P_\infty=0$ противоречит одному из результатов работы.*

Реакцией на это замечание явилась работа Бореля «Об одной вероятностной проблеме, относящейся к непрерывным дробям» [131]. В ней он прежде всего показывает, что равенство $P_\infty=0$ не противоречит работе Бернштейна и ее автора ввело в заблуждение различие обозначений в указанной его работе и [112]. Что же касается возражения Бернштейна о зависимости и независимости собы-

* *Bernstein F.* Uber eine Anwendung der Mengenlehre, — Math. Ann., 1911, 71, 417—439.

тий, то Борель, согласившись с ним, замечает, что доказательства из [112] легко распространяются и на зависимые события. Этому и посвящена работа [131]; но переход к зависимым событиям с соответствующим использованием условных вероятностей оказался у Бореля вовсе не простым [131, с. 580—583].

Вернемся, однако, к мемуару [112].

Случай 3. Он, естественно, несколько труднее предыдущих. Фиксируя s и n и называя успехом ситуацию, в которой при n испытаниях появится событие A_s, а все остальные ситуации — неудачей, мы можем использовать приведенные решения проблем 1—3. Пусть вероятность успеха p_{ns}. Для бесконечной матрицы с двойным входом

$$\prod = \{p_{ns}\}; \quad n, s = 1, 2, \ldots$$

имеет место

$$\sum_n p_{ns} = 1, \quad s = 1, 2, \ldots,$$

в то время как возможны случаи: а) $\sum_s p_{ns} < \infty$ или б) $\sum_s p_{ns} = \infty$. Возможен и смешанный случай: для некоторых n имеет место *а*), для некоторых — *б*).

Борель ограничивается предположением *а*). При этом ряд $\sum_s \sum_n p_{ns}$ расходится.

Обозначим для каждого n вероятности B_{n0}, B_{n1}, ..., $B_{n\infty}$, обозначенные выше через P_0, P_1, ..., P_∞. Полагая

$$v_{ns} = \frac{p_{ns}}{1 - p_{ns}},$$

Борель получает равенства:

$$B_{n0} = \prod_s (1 - p_{ns}), \quad B_{nk} = B_{n0} \Sigma v_{ns_1} v_{ns_2} \ldots v_{ns_k}, \quad B_{n\infty} = 0.$$

Этим заканчивается общая часть мемуара. Две другие его части посвящены арифметическим приложениям. Во второй части вводится уже знакомое читателю понятие нормального числа, доказывается, что на любом отрезке нормальные числа образуют множество полной меры, приводится тонкий пример нормального числа

(выше говорилось, что для наперед заданного числа необычайно трудно определить, является оно нормальным или нет).* Все это для десятичных разложений иррациональных чисел. В то время (1909 г.) Борель еще не был уверен, что число, нормальное в одной системе счисления, является нормальным и в любой другой системе. В связи с этим числа, нормальные во всякой системе, в мемуаре он называет абсолютно нормальными.

Содержательна и третья часть мемуара. Пусть x — иррациональное число и $0<x<1$. Рассмотрим его разложение в непрерывную дробь:

$$x=\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ldots}}}.$$

Здесь a_n могут иметь любые целые положительные значения. Если x случайная величина, то и a_n — случайны. Этим самым мы рассматриваем случай, когда число исходов опыта и число опытов — счетное. Бесконечное множество опытов $A_1, A_2, \ldots$, каждый из которых может иметь бесконечно много исходов: $a_n=0, 1, 2, \ldots$.

При этом, как говорилось при рассмотрении случая 3, $\sum\limits_n p_{ns}=1$, и величины $\sum\limits_s p_{ns}$ остаются произвольными. Борель исходит из предположения, что x имеет равномерное распределение на отрезке $(0, 1)$. Как легко видеть,

$$p_{1k}=\frac{1}{k(k+1)}.$$

Для $p_{2k}, \ldots$ получаются довольно громоздкие формулы, но в мемуаре приведены интересные асимптотические выражения первых p_{nk} для больших k:

$$p_{2k}=\frac{\pi^2}{6}\frac{1}{k(k+1)}(1-\varepsilon_k),\quad \varepsilon_k=o(1),$$

$$p_{3k}=\frac{1}{k(k+1)}\sum_{q=2}^{\infty}\frac{Q(q-1)}{q^2}.$$

Здесь $Q(N)$ — число делителей числа N (включая и N).

Таков, за вычетом доказательств, этот знаменитый мемуар. Можно с уверенностью сказать, что в 1909 г.

* Новые результаты по этим вопросам содержатся в монографии А. Г. Постникова [Л. 14].

Борель был далек от понимания его значения, которое прежде всего определяется тремя обстоятельствами. Во-первых, в мемуаре содержалось предложение, получившее название леммы Бореля: если последовательность независимых случайных опытов дает для события A вероятности $p_1, p_2, \ldots$, то вероятность осуществления A бесконечное число раз может быть только нулем или единицей. Она равна нулю, если ряд $\sum_1^\infty p_n$ сходится, и равна единице, если он расходится.

Как показал Кантелли (1917 г.), в случае сходимости названного ряда утверждение Бореля справедливо и в том случае, если опыты не являются независимыми (лемма Бореля—Кантелли). Фактически и это предложение при несколько менее общих условиях также установлено Борелем [131]. Стало, однако, традицией, что в литературе обе леммы формулируются вместе в виде леммы Бореля—Кантелли. Число ее приложений не поддается учету. Достаточно сказать, что она является фундаментальной в теории рядов со случайными членами (см., например, доказательство теоремы Колмогорова о трех рядах [Л. 9]), используется при доказательстве закона повторного логарифма, в теореме П. Леви о траекториях броуновского движения и т. д.

Во-вторых, в мемуаре впервые встретились теоремы типа «закон нуля и единицы». Эти теоремы, наиболее общая формулировка которых принадлежит Колмогорову (1931 г.), играют важную роль во многих вопросах, в частности в теории интегралов в бесконечномерных пространствах (Штейнгауз, Иессен).

В-третьих, в мемуаре, во второй его части, где найдена мера множества нормальных чисел, впервые установлен усиленный закон больших чисел: если в каждом из n назависимых испытаний событие появляется с одной и той же вероятностью p и m — число появления события, при n испытаниях, то

$$P\left\{\lim_{n\to\infty} \frac{m}{n} = p\right\} = 1.$$

Закон больших чисел в формулировке Бернулли: для любого $\varepsilon < 0$ при достаточно большом n с вероятностью, сколь угодно близкой к единице,

$$\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon>1-\varepsilon$$

значительно слабее утверждения Бореля и непосредственно из него следует. Теорема Бернулли, таким образом, утверждает лишь следующее: если n — достаточно велико, то с какой угодно большой вероятностью при этом значении n величины $\frac{m}{n}$ и p будут близки. Усиленный закон больших чисел утверждает, что разность между ними останется малой и при всех последующих значениях n.

Тенденция Бореля — углубленное рассмотрение частных ситуаций без стремления к их непременным обобщениям, о чем уже говорилось выше, помешала ему считаться единоличным открывателем усиленного закона больших чисел. Его обычно приписывают Кантелли (1917 г.), отмечая при этом заслуги Бореля и Хаусдорфа. Фреше, однако, называет усиленный закон теоремой Бореля и по этому поводу говорит следующее: «До Бореля теорема Бернулли была фундаментальной. Теперь фундаментальной следует считать теорему Бореля. Доказательство Бореля аналитическое, но он указал, что можно получить и геометрическое доказательство. Оно было дано позднее Хаусдорфом» [Л. 5, с. 83].

Арифметика континуума. Мы видели, какую роль в вероятностных исследованиях Бореля играют вопросы арифметики. К числу важных арифметических проблем относится круг задач, связанных с приближением иррациональных чисел к рациональным. Этими задачами занимались такие ученые, как Лагранж, Лиувилль, Эрмит, Гурвиц, Борель, Минковский. Борель был первым, кто привлек к теории этих приближений теоремы о покрытиях, меру, проложив этим дорогу к метрической (вероятностной) арифметике. Мы расскажем сейчас об его основном мемуаре на эту тему: «К арифметическому анализу континуума» [75], который предшествовал работе [112].

Приведем некоторые сведения о цепных дробях, которые будут необходимы для последующих рассуждений. Цепной дробью называется выражение вида: *

* На русском языке имеется превосходная книга: *Хинчин А. Я.* Цепные дроби. М., «Наука», 1978 (издание третье), соединяющая в себе достоинства учебника и монографии. В ней изложена и теория рациональных приближений, но результаты Бореля, если не считать его леммы, не приведены.

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots}}}, \tag{7}$$

понимаемое как предел при $n \to \infty$ выражения:

$$x_n = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots \cfrac{1}{a_n}}}. \tag{8}$$

Мы ограничимся случаем, когда a_0 — любое вещественное число, а $a_1, a_2, \dots$ — любые натуральные числа. При этом условии x всегда существует. Доказывается, что всякое вещественное число x имеет единственное представление вида (7).

Произведя указанные в (8) действия, получим x_n в виде обыкновенной дроби $\frac{P_n}{Q_n}$. Она называется n-й подходящей дробью для x. Таким образом, всякое число x можно представить в виде предела последовательности x_n подходящих дробей его разложения (8).

Значение непрерывных дробей обусловлено тем, что разложение (7) не связано ни с какой системой счисления (десятичной, двоичной. . .), подобно тому, как геометрические свойства фигур не зависят от выбора системы координат. Поэтому разложение чисел в непрерывные дроби определяет их внутренние свойства, и именно этим определяется его роль в теоретической арифметике, в частности в теории рациональных приближений чисел.

Первым важным результатом в теории таких приближений была теорема Лиувилля. Пусть задано алгебраическое число ξ порядка n. Тогда существует такое число $M(\xi)$, независящее от q, что при любых натуральных p, q

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{Mq^n}.$$

Именно такого типа верхние и нижние оценки играли основную роль в последующих работах большого количества других авторов. Приведем соответствующие результаты Бореля. В начале работы [75] он анонсирует следующую теорему.

Пусть $0<\alpha<1$ — произвольное иррациональное число. Можно определить бесконечное множество интервалов (A_n, B_n), таких, что $A_n, B_n \to \infty$ при $n \to \infty$, и существуют p_n, q_n, для которых

$$\left|\frac{p_n}{q_n}-\alpha\right|<\frac{1}{q_n^2\sqrt{5}}, \quad A_n<q_n<B_n.$$

Этот весьма общий результат в свою очередь допускает ряд обобщений. Рабочим инструментом доказательств в мемуаре в значительной мере является лемма: пусть на интервале $(0, n)$ заданы $n+1$ точек. Тогда среди них найдутся по крайней мере такие 2 точки, что расстояние между ними будет меньше единицы (за исключением случая, когда заданы точки $0, 1, 2 \ldots, n$). Борель вводит удобное для дальнейшего рассмотрения понятие относительного отклонения λ двух рациональных дробей:

$$\left|\frac{p}{q}-\frac{r}{s}\right|=\lambda\left(\frac{1}{q^2}+\frac{1}{s^2}\right).$$

Первые две из приводимых ниже теорем имеют в основном вспомогательное значение.

I. Пусть $\frac{P_{i-2}}{Q_{i-2}}, \frac{P_{i-1}}{Q_{i-1}}, \frac{P_i}{Q_i}$ — три последовательные подходящие дроби. Тогда по крайней мере одно из чисел $\frac{q_i}{q_{i-1}}$, $\frac{q_{i-1}}{q_{i-2}}$ больше $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

II. Обозначим подходящие дроби, фигурирующие в теореме I, соответственно, $\pi_{i-2}, \pi_{i-1}, \pi_i$ и пусть λ_{i-1}, λ_i — относительные отклонения π_{i-2} от π_{i-1} и π_{i-1} от π_i. Тогда по крайней мере одно из них $<\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Дальнейшие построения основаны на введенном Гурвицем понятии канонического интервала дроби $\frac{p}{q}$. Так называется интервал $\left(\frac{p}{q}-\sqrt{5}, \frac{p}{q}+\sqrt{5}\right)$. Как показал Гурвиц, интервал $(0, 1)$ можно покрыть конечным числом канонических интервалов. Но вопрос об эффективном построении такого покрытия оказался открытым. В рас-

сматриваемой работе [75] Борель преодолел эту трудность и показал, каким образом можно его построить.

Определения. 1) Множество рациональных дробей называется полной системой на интервале $\Delta=(0, 1)$ (ПСД), если система канонических интервалов, отвечающих этому множеству, покрывает Δ. 2) Две дроби $\frac{p}{q}$, $\frac{r}{s}$ называются смежными, если отвечающие им канонические интервалы пересекаются.

III. Пусть имеется система дробей $\{p\}$. Чтобы $\{p\}$ было ПСД, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\frac{p}{q} \in \{p\}$ можно было найти в этой системе $\frac{r}{s}$ и $\frac{v}{w}$ так, чтобы

$$\frac{r}{s} < \frac{p}{q} < \frac{v}{w},$$

причем $\frac{r}{s}$ и $\frac{v}{w}$ — смежные дроби.

Эффективное построение ПСД дается следующей, довольно громоздко доказываемой теоремой.

IV. Пусть $A>B$, $B>0$ и имеет место $B>15A^2$, $A>10$. Тогда дроби, знаменатели которых заключены между A и B, образуют полную систему (всюду имеется в виду интервал (0, 1), но, очевидно, все остается в силе для любого интервала).

Изложенные результаты позволили Борелю получить такую теорему о рациональных приближениях.

V. Пусть α — произвольное число и A, B — вещественные числа, для которых имеет место $A>10$, $B>15A^2$. Тогда можно найти такие целые p и q, что

$$A < q < B,$$

$$\left|\frac{p}{q} - \alpha\right| < \frac{1}{\sqrt{5}\, q^2}.$$

Оценки отклонений $\alpha - \frac{p}{q}$ связаны с построениями на числовой оси. Если α и $\frac{p}{q}$ — векторы, то оценки отклонений их разности приводят к построениям в многомерных пространствах. Многомерные обобщения изложенных выше результатов Бореля, как и соответствующих результатов других авторов, оказались очень трудными. Ими занимается Борель во второй части своего мему-

ара [75]. Рассмотрения здесь начинаются с имеющих самостоятельный интерес теорем о покрытиях (простейшая из них — многомерное обобщение леммы Гейне—Бореля).

Открытые множества G, заменяющие интервалы на оси, Борель определяет неравенствами $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) < 0$, а их меры — интегралами $\int\limits_G dx_1 dx_2 \ldots dx_n$. Однако при доказательствах он фактически этим не пользуется, а оперирует соответствующими топологическим и метрическими понятиями.

На этой основе Борель изучает вопрос о приближении системы чисел $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ системой дробей $\left(\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots, \frac{p_n}{q_n}\right)$. Для случая равных знаменателей $q_1 = q_2 = \ldots = q_n = q$ он получает обобщения результатов Эрмита и Гурвица относительно нижней оценки разности $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right|$, а также ряд теорем о ее верхней оценке. Вот одна из них.

Пусть $a = \frac{n+1}{n}$, $\beta = \frac{1}{a}$, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — произвольная система чисел. Тогда существует бесконечное множество систем таких целых чисел $(p_1, p_2 \ldots, q)$, что

$$\left|\frac{p_i}{q} - \alpha_i\right| < \frac{a}{q^\beta}.$$

Последующие рассмотрения приводят Бореля и к оценкам других типов, которые, в частности, можно интерпретировать как оценки расстояний от точки до прямой. Приведем одну из них. Пусть a, b — произвольно заданные константы. Существует бесконечное множество систем целых чисел (x, y, z), для которых

$$|ax + by + z| < \frac{\theta\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}{z^2},$$

где θ не зависит от a и b.

Теория игр

> Таким образом, и игры заслуживают изучения; и если какой-нибудь проницательный математик этому себя посвятит, то получит много важных результатов, ибо нигде человек не показывает столько изобретательности, как в игре.

Борель в полной мере сознавал значение этих слов, принадлежащих Лейбницу. Вопросы теории игр занимали значительное место в его вероятностных публикациях. Все они, за исключением представленной Пуанкаре в 1911 г. заметки о тасовании карт, в которой рассмотрена некоторая задача комбинаторики, относятся к позднему периоду творчества Бореля. По-видимому, одним из стимулов занятий Бореля математическими играми было его желание написать оригинальную книгу на эту тему для его с коллегами многотомного трактата по теории вероятностей. Такая книга под названием: «Приложения к теории азартных игр» [253] вышла в 1938 г. Ей предшествовала серия заметок, первая из которых носила название: «Теория игр и интегральные уравнения с симметричным ядром» [178]. Вслед за ней появляются заметки: «Об играх, в которых случай сочетается с умением игроков» [201], «О системе кососимметрических форм и общей теорией игр» [218].

Стратегические игры. Борель с самого начала подчеркивает, что он отличает игры, в которых фигурирует только фактор случайности, от игр, в которых, кроме того, требуется искусство, стратегия участников игры. Сейчас можно с уверенностью утверждать, что на этом пути Борелю удалось наметить наиболее важное направление, которое в наши дни переоценить невозможно.

После выхода его книги [253] Борель публикует новую серию работ по теории игр. В чисто математическом отношении они выглядят более законченными, нежели работы первой серии, но эти новые работы, посвященные весьма давним игровым задачам, а также связанным с ними парадоксам, не имели такого принципиального значения. Поэтому мы расскажем именно о первой серии работ Бореля, а также о высказываниях Фреше по

вопросу о приоритете в создании теории линейных стратегических игр.

В начале работы [178] рассматривается игра, в которой выигрыш зависит как от случая, так и от стратегии двух играющих, находящихся в одинаковых условиях. Ставится вопрос о возможности определить наилучший по сравнению с другими метод игры. Под методом игры подразумевается код, который при всех возможных ситуациях (число их предполагается конечным) указывает, как игрок должен действовать. В большинстве обычных игр число возможных методов весьма велико, но всегда ограничено.

Итак, допустим, что каждый участник использует конечное число возможных методов $C_1, C_2, \ldots, C_n$, но в начале (например, при тасовании карт) или в процессе игры имеет место элемент случайности. Если игроков двое — A и B, причем первый из них применяет метод C_i, а второй — метод C_j, то можно найти вероятность π_{ij} выигрыша A. Возникает вопрос, существует ли такой метод игры C_i, что π_{ij} — положительно для всех C_j, т. е. при всех методах, которые может использовать B. Такой метод, очевидно, для A оказывается целесообразным.

Борель, однако, замечает недостаточность подобной постановки задачи и видоизменяет ее, считая, что выборы игроками A и B стратегий $C_1, \ldots, C_n$ также случайны. Пусть вероятность выбора C_i со стороны A равна p_i и, соответственно, q_i — вероятность того, что B выберет q_i. Тогда вероятность P выигрыша A равна:

$$P = \Sigma \pi_{ij} p_i q_j.$$

Для упрощения Борель ограничивается симметричной игрой, характеризуемой равенством $\pi_{ii}=0$, означающим, что если оба игрока используют один и тот же метод, их шансы равны. Он указывает, что в большинстве игр, в которых один из участников имеет право первого хода, шансы обоих не равны, но шансы уравниваются, если игру рассматривать как совокупность двух партий, поскольку в одной из них каждый ходит первым.

Очевидно, что

$$\pi_{ij} + \pi_{ji} = 1, \quad \pi_{ij} = \frac{1}{2} + a_{ij}, \quad a_{ij} = -a_{ji},$$

откуда

$$P=\sum_{i,\,j}\alpha_{ij}\,(p_iq_j-q_ip_j)+\frac{1}{2}=\alpha+\frac{1}{2}. \qquad (1)$$

В той же работе [178] доказывается, что при $n=3$ можно найти положительные p_1, p_2, p_3, удовлетворяющие (1), и такие, что $\alpha=0$, $P=\frac{1}{2}$ при всех q_1, q_2, q_3. Таким образом, можно указать метод, позволяющий с равными шансами играть с любым противником.

Далее те же соображения распространяются на ситуации, когда выборы стратегий подчинены уже не только дискретным, а произвольным распределениям вероятностей, и, соответственно, P записываются не в виде сумм, а в виде двойных интегралов Стильтеса.

В заключение говорится, что подобные схемы при соответствующих уточнениях могут быть использованы в экономике и военном деле.

Дальнейший шаг был сделан в заметке [201], где вместо матрицы вероятностей π_{ij} была введена матрица игры $\| g_{ij} \|$, g_{ij} — выигрыш A, когда он выбирает стратегию C_i, а B — стратегию C_j. Тогда если p, q имеют тот же смысл, что и выше, средний выигрыш A выражается в виде:

$$E\,(p,\ q)=\sum_{i,\,j}g_{ij}p_iq_j. \qquad (2)$$

Вопрос при этом ставится так: может ли B выбрать такую стратегию, т. е. q_i, чтобы A, зная ее, не мог со своей стороны выбрать такое p_i, чтобы E стало положительным? Если это невозможно, считает Борель, игрок, знающий тактику своего противника, в конце концов выиграет. Таким образом, единственное, что следует предпринимать, чтобы не проиграть, это варьировать вероятности p, т. е. придерживаться смешанных (incoherente) стратегий относительно среднего выигрыша. Борель для некоторых n показал, что можно выбрать такую стратегию q_k игрока B, что при любом выборе стратегии p_i игрока A средний выигрыш A (а также и B) оказывается равным нулю.

Приоритет в теории стратегических игр. В 1936 г. на Международном математическом конгрессе в Осло

Борель выступил с докладом,* в котором (без использования современной терминологии) ввел понятия оптимальных смешанных стратегий и цены игры. Там же для $n=3$ были намечены геометрические рассуждения, с современной точки зрения соответствующие сведению задачи теории игр к линейному программированию, но без четкой формулировки экстремальной задачи. Вершины возникающих многогранников у Бореля упоминаются, и он даже отмечает случаи вырождения (не усматриваются соображения, связанные с выпуклостью, и не затронута алгорифмическая сторона вопроса).

В примечании к публикации этого доклада Борель отмечает: «После моего сообщения в Осло мне стала известна работа фон Неймана по теории игр, которую я еще не имел возможности изучить; фон Нейман цитирует мою работу 1927 года, но он не был знаком с 3-им изданием моей книги [111] „Элементы теории вероятностей“ (1924), в которой для симметричных игр я развиваю соображения, совершенно аналогичные его рассуждениям». В другом примечании к той же публикации Борель связывает свои соображения с теоремой фон Неймана о минимаксе. Подчеркивая ее теоретическое значение, Борель в данном случае оказался плохим пророком, отозвавшись здесь скептически о возможности эффективного решения задачи теории линейных игр при больших n.

Фреше, который придавал большое значение работам Бореля [178, 218], отмечал в то же время их незаконченность. Последнее он объяснял загруженностью Бореля государственными делами в 20-х годах: «Борель в тот период все больше и больше оказывался втянутым в политическую деятельность: сначала — мэр своего родного города, затем генеральный советник департамента, депутат парламента, министр морского флота; и я даже имел честь временно заменять его как профессор на факультете наук. Этим объясняется, что, поставив проблему и решив ее в частном случае, Борель не удосужился рассмотреть в деталях ее математическую сторону» [Л. 5, с 91]. Эти соображения представляются мало убедительными: не видно, чтобы за этот период творческая

---

* *Borel E.* Quelques remarques sur l'appliquation du calcul des probabilités aux jeux de hasard. — Compte rendus du Congrès international des mathematiciens. Oslo, 1939.

активность Бореля заметно уменьшилась. Вызывает, однако, сочувствие забота Фреше о приоритете Бореля в основании теории стратегических игр. После выхода в 1947 г. известной книги фон Неймана (в соавторстве с Моргенштерном) «Теория игр и экономических решений» появилось большое количество статей, монографий и книг по теории игр. Вместе с созданием линейного программирования и других смежных прикладных дисциплин все это уже к началу 50-х годов привело к построению внушительного здания теории операций, выводы которой оказались эффективными в связи с возникновением к тому времени ЭВМ.

Еще при жизни Бореля его друзьям пришлось констатировать, что борелевские работы по теории стратегических игр (лучше сказать, по теории операций, хотя такого термина тогда не было) оказались забытыми, а вернее, — незамеченными. В 1953 г., когда они могли иметь уже только историческое значение, Фреше организует английский перевод названных заметок Бореля и со своими краткими комментариями публикует их в американском журнале «Эконометрика». Перед этим он все материалы посылает в США фон Нейману, ответ которого был опубликован в том же номере, что и перевод заметок Бореля. Согласно фон Нейману, реакция которого на комментарии Фреше не была позитивной, до его, фон Неймана, теоремы о минимаксе (1928 г.) мало что можно было извлечь существенного из более ранних публикаций Бореля, который в работе 1921 г. придерживается гипотетической точки зрения относительно справедливости этого предложения. Возражая, Фреше там замечает: «Но это последнее верное замечание должно быть дополнено, так как впоследствии Борель пришел к выводу о справедливости теоремы. У фон Неймана имелась ссылка на работу [178], в связи с чем он говорит: „Мои идеи в теории игр возникли еще до ее чтения“» [Л. 5, с. 92].

Полагая, что публикации в «Эконометрике» все же не пробудили должного интереса к идеям Бореля в теории игр, Фреше в 1959 г. публикует их заново во французском журнале «Ревю д'экономи политик» вместе с ответом фон Неймана.

«В бесчетных публикациях по психологическим играм и их приложениям в экономике теперь, — говорит Фреше (1967 г.), — уже невозможно далее игнорировать прио-

ритет Бореля» [Л. 5, с. 92]. Считая, что заслуги Бореля все еще не получили должного признания, Фреше в подтверждение этого ссылается на одну из статей 1959 г. памяти безвременно ушедшего великого фон Неймана, в которой говорится, что теория игр была основана в его работе 1928 г., и ни слова не сказано о вкладе Бореля.

В действительности, дело обстоит не столь уж мрачно. Например, такой авторитет, как Р. Беллман в своей книге в 1961 г. говорит, что теория игр была одновременно построена Борелем и фон Нейманом независимо друг от друга. Там же отмечается, что краеугольный камень всей теории игр — теорема о минимаксе фон Неймана — была ранее для случая $n=4$ установлена Борелем. «Из этой теоремы вытекает следующее. A может заранее сообщить B о своем выборе распредения вероятностей, не давая при этом противнику ни малейшего преимущества. То же самое справедливо и относительно игрока B. Безусловно, этот результат является совершенно неожиданным».* Именно этот последний факт Борель первым полностью осознал.

Резюмируя, следует сказать: приоритет Бореля в отчетливой постановке задачи, в рассмотрении некоторых частных случаев, в подчеркивании возможности приложений к экономике, психологии, стратегиям можно считать установленным. Вместе с тем, было бы неверно ставить знак равенства между капитальным вкладом в теорию стратегических игр фон Неймана и соответствующими начинаниями Бореля.

Из работ Бореля, относящихся к другим направлениям теории игр, назовем заметки: «Об элементарной проблеме стратегии» [247], «О взаимном пари» [255], «Счетные вероятности и пари Паскаля» [268], «О Петербургском парадоксе» [286]. Идея первой из них подробно развивается в книге Бореля [253]. О последней рассказано в цитированной выше (с. 95) книге «Вероятность и достоверность». И, наконец, следует назвать работу с несколько рекламным названием: «Математическая теория бриджа для всех. 134 таблицы вероятностей, с указанием на их применения. Простые формулы, приложения. Около 4000 вероятностей» [260].

---

* *Беллман Р.* Процессы регулирования с адаптацией. М., «Наука», 1964, с. 254.

Думается, длительный и многообразный интерес Бореля к проблемам игр был отражением духа борьбы, который жил в этом человеке.

Множества, мера, интеграл

Конструктивный подход Бореля. В теории множеств Борель известен прежде всего как один из основателей теории меры. Отправляясь от исходной концепции Бореля, видоизменяя и дополняя ее, Лебег построил свою теорию меры, ввел понятие измеримой функции, а затем и свой знаменитый интеграл, без которого современный анализ уже немыслим. Все понятия, введенные Лебегом, получили в его же работах далеко идущее развитие. Все это, однако, не затмило заслугу Бореля. Его мероопределение было конструктивно и основано на понятии, которое Н. Н. Лузин охарактеризовал так: «Семейство множеств, выделенное Борелем, оказалось необычайно плодотворным и творческим. Это так называемые множества, измеримые B». [Л. 11, 2, с. 530]. Борелю принадлежит также хронологически первая из важных теорем относительно связи понятия непрерывности и измеримости функции. Основываясь на ней, он предложил свой эквивалент лебеговского интеграла от ограниченной функции, не имевший, однако, большого принципиального значения. Вклад Бореля в специальные вопросы теории множеств определяется также его работами по парадоксам теории множеств (анализ парадокса Ришара [110], парадоксы конгруэнтности, вытекающие из принятия аксиомы Цермело [265], [266]), а главное — его трудными и глубокими изысканиями по структуре множеств меры нуль, возникшими в его исследованиях по моногенным функциям [181].

Примерно из тридцати публикаций Бореля по теории множеств (заметки, статьи, книги) около половины посвящено вопросам принципиального и наиболее общего характера. Именно здесь Борель впервые заявил о себе как последовательный и активный представитель конструктивного, или, как иначе говорили, реалистического подхода к математике, да и к любой науке вообще.

В 1904 г. появилась заметка Цермело, в которой доказывалась теорема о возможности вполне упорядочить

любое множество. Доказательство автор основывал на аксиоме выбора («аксиома Цермело»): пусть задана произвольная совокупность множеств $z=\{M\}$. Тогда существует множество M элементов, выбранных по одному из каждого множества M (иными словами, существует множество, состоящее из единственных представителей каждого множества M).*

В случае, если число множеств M конечное или счетное $z=\{M_1, M_2, \ldots\}$, эта аксиома многим представлялась допустимой, но, поскольку Кантором еще в 1874 г. было доказано существование несчетных множеств, возник вопрос о ее приемлемости в общем случае. В связи с этим редакция журнала, в котором была опубликована работа Цермело, обратилась в числе других и к Борелю, уже известному в Германии рядом своих работ, с просьбой высказать свое мнение относительно этой аксиомы. В своем ответе «Несколько замечаний об общих принципах теории множеств» Борель высказался против принципа выбора: «Эти соображения мне представляются столь же мало допустимыми, как и такое: чтобы вполне упорядочить множество E достаточно произвольно выбрать в нем элемент, которому припишем ранг (номер) 1, затем другой элемент ранга 2 и так далее *трансфинитно* (курсив Бореля, — *Е. П.*), т. е. так, что с помощью трансфинитных чисел будут исчерпаны все элементы E. Но никакой математик не согласится принять подобное рассуждение. Мне кажется, что соображения, которые можно высказать против него, относятся к отрицанию возможности выбора, сделанного несчетное количество раз. Это находится за пределами математики» [91, с. 195].

В свою очередь Борель тогда же обратился к своим соотечественникам Адамару, Лебегу и Бэру с просьбой высказать свои соображения относительно аксиомы выбора. В то время Адамар уже был знаменит, а тридцатилетние Бэр и Лебег уже зарекомендовали себя работами, которым суждено было стать классическими (Бэр явился основоположником теории разрывных функций; трансфинитные построения играли в его исследованиях очень важную роль).

Так возникла дискуссия, которая стала известна в математическом мире под названием: «Пять писем о трансфи-

---

* *Zermelo E.* — Mathem. Ann., 1904, 59, S. 514—516.

нитном Адамара, Бэра, Лебега и Бореля». Эти письма, которые Лузин неоднократно называл знаменитыми, опубликованы в собраниях сочинений всех четырех названных корреспондентов [304, 3, с. 1263—1273]. Борель, кроме того, включал их полный текст в свои книги [291] (изд. 2-е и последующие), [285].

Мы расскажем лишь коротко об этой дискуссии, отсылая читателя к книге Ф. А. Медведева [Л. 6, гл. 3], в которой содержится ее анализ, а также высказывания по тем же вопросам Пуанкаре и других ученых.

Ядром обсуждавшегося вопроса было различие между дескриптивным и конструктивным подходами мышления. В первом случае объект задается, определяется своими свойствами, во втором — указывается, как конкретно он может быть реализован (в аксиоме Цермело последнего как раз не было).

Адамар безоговорочно принял первую точку зрения и был сторонником аксиомы выбора: «Мало ли вещей на свете, — писал он, — о которых мы не знаем и о которых никогда не узнаем. Вот, например, капля воды. Число молекул в ней конечно, но какое оно? Я не знаю и никогда не узнаю этого, — и это еще не резон, чтобы отвергнуть кинетическую теорию материи» [Л. 11, 2, с. 511].

Уже известная нам противоположная точка зрения Бореля хорошо выражена Лузиным: «За словами всегда должна выступать реальность. Рассуждения Цермело только греза, так как каждый из идеалистов (здесь сторонник аксиомы Цермело, — *Е. П.*) выбирает и грезит по-своему, и нет не только возможности сообщить своему собеседнику о проделанном выборе, но даже и быть согласным с самим собой» [Л. 11, 2, с. 511]. Лебег и Бэр присоединились к Борелю в отрицании аксиомы выбора, но позиции их были не столь категоричны. В то время как Борель вообще отрицал возможность рассмотрения несчетной бесконечности и, соответственно, возможность рассмотрения всех трансфинитных чисел второго класса 1, 2, . . ., ω, $\omega+1$, . . ., . . ., Лебег несчетную бесконечность допускал. В своем письме Лебег подчеркивал, что он, не разделяя вообще установки Адамара, склонен, в отличии от Бореля, занимать более осторожную позицию.

Точку зрения Бореля во многом разделял Лузин: «Наша способность создавать идеальные понятия, даже если избегать логических противоречий, должна иметь

известные границы, иначе наука станет слишком фантастической» [Л. 11, 2, с. 512].

В полном соответствии с конструктивистскими установками Бореля находилось, например, такое его высказывание о функциях. Соглашаясь, что множество функций вещественной переменной логически определено, он добавляет: «Но я спрашиваю, имеем ли мы о нем должное представление? Можем ли мы вообще представить функцию (даже предполагая, что она принимает лишь значения 0 и 1)? Чтобы задать ее, нужно указать ее значения для всех действительных переменных. Но так как это множество несчетно, невозможно указать метод, позволяющий иметь их все, т. е. получить любое из них в ограниченное время» [34, с. 108].

По Борелю, трудности возникают даже при определении частных значений x и $y=f(x)$. Всякое ли число x (соответственно, y) доступно нам, вычислимо? Разумеется нет, если оно иррационально. И Борель вводит понятие вычислимого числа: число x вычислимо, если оно рационально; если x иррационально, то оно вычислимо, если при любом натуральном n можно при помощи «реально осуществимых» операций найти рациональное число, отличающееся от x меньше чем на $\frac{1}{n}$. Затем Борель определяет вычислимую функцию: функция вычислима, если ее значение вычислимо для каждого вычислимого значения аргумента. Из этого определения следует, что функция может быть вычислимой лишь в том случае, если она непрерывна для вычислимых значений аргумента. Как справедливо замечает Медведев: «. . .было бы слишком смелым сопоставлять эти соображения Бореля с рядом положений современной конструктивной математики, однако родство их несомненно, и последнее предложение небезыинтересно в частности потому, что в современном конструктивном анализе всякая конструктивная функция непрерывна» [Л. 6, с. 100].

Еще Адамар отмечал противоречивость научно-философских установок Бореля, выразившуюся в том, что в конкретно аналитических построениях и доказательствах теорем он использовал понятия (трансфинитные числа и т. п.), которые сам же критиковал. В настоящее время вопрос о непоследовательности Бореля отчасти проанализирован [Л. 6, с. 132—134]. Но, следует заметить, Борель

не был в этом исключением. И разве Герман Вейль, отрицавший вместе с Л. Броуэром святая святых математики и логики — принцип исключительного третьего (для бесконечных множеств), в своих знаменитых работах не следовал многократно этому принципу?

Фундаментальными вопросами теории множеств Борель интересовался до конца жизни. Возвращался он в своих поздних работах и к аксиоме выбора.

В заметке «Аксиома выбора и мера» [265] Борель, не прибегая к общему определению меры, устанавливает парадокс, к которому приводит аксиома Цермело. Путем несложных, но тонких рассуждений он показывает, что использование этой аксиомы позволяет представить сегмент $[a, b]$ в виде счетного множества конгруэнтных между собой множеств, каждое из которых получается из другого путем сдвига по оси, — обстоятельство, характерное для бесконечной прямой, но не для отрезка. «Я констатирую этот факт, не пытаясь его объяснить, быть может, сторонники аксиомы выбора будут склонны принять его, видоизменив подходящим образом понятие меры множества на отрезке» [265, с. 309]. В той же заметке, уточняя свои рассуждения, приведенные в книге [34, с. 251], Борель говорит об аналогичном парадоксе, относящемся к конгруэнтным фигурам на сфере.

Более значительной представляется, однако, работа Бореля по анализу парадокса Ришара (1905 г.) — антиномии, привлекшей также внимание Пуанкаре, Рассела и других в период становления концепций кризиса логического построения математики в начале XX в. (см. [Л.6, с. 122—130], а также [285]).

Мера. Понятие меры множества является обобщением понятия длины отрезка (мы ограничиваемся множествами на прямой; обобщения на пространства высших размерностей в принципе те же). Первые попытки определения меры были в прошлом столетии предприняты Риманом, Кантором, Дарбу, Жорданом. Все авторы при этом основывались на покрытии множества системой интервалов (в определенном смысле минимальной), с нахождением суммарной их длины. Но эти интервалы выбирались заранее; принципиальный шаг, сделанный Борелем, по его мнению, состоял в том, что у него покрывающее множество интервалов выбиралось в зависимости от самого этого множества. Существеннее, однако, то, что в отличие от своих

предшественников Борель использовал покрытия, состоящие не только из конечного, но и из счетного множества интервалов. Деля сегмент $q=[a, b]$ на равные части, Жордан пришел к выводу, что мера множества его рациональных точек R равна $b-a$. Этот результат нельзя было считать удовлетворительным, поскольку мера множества иррациональных точек $q-R$, имеющего большую мощность (несчетного), оказывалась равной нулю. Занумеровав R, $R=\{r_1, r_2, \ldots\}$, задавая произвольно $\varepsilon > 0$ и покрывая каждое r_n интервалом длины $\frac{\varepsilon}{r^2}$, Борель (1897 г.) пришел к другому результату: мера R равна нулю! Как отмечает Фреше [Л. 5, с. 58], это обстоятельство, явившееся изумительным (suprenante) для своего времени, поскольку R всюду плотно на q, привело Бореля к общей теории меры.

Борелевское определение меры связано с введенными им «вполне определенными» множествами, теперь называемыми борелевскими, или чаще, следуя Лебегу, B-множествами. Так именуется класс множеств, определяемых из интервалов (α, β) с помощью операций двух видов: 1) составление суммы (соединение) конечного или счетного числа слагаемых, 2) составление дополнения (разности) двух уже определенных множеств, одно из которых (вычитаемое) — часть другого. Это определение B-множества эквивалентно другому, в котором дополнения множеств заменяются пересечениями конечного или счетного числа множеств.

Отметим попутно, что Борель ввел оказавшиеся затем очень полезными в разных областях (в общем анализе, в теории вероятностей и т. п.) понятия верхнего и нижнего предела последовательности множеств:

$$\overline{\lim}\, E_n = (E_1 + E_2 + E_3 + \ldots)(E_2 + E_3 + \ldots)(E_3 + \ldots),$$
$$\underline{\lim}\, E_n = E_1E_2E_3 \ldots + E_2E_3 \ldots + E_3 \ldots .$$

B-множество иначе называется B-измеримым, а его мера определяется так: мера интервала — его длина, мера суммы непересекающихся интервалов — сумма их длин, мера дополнения A к B, $A \subset B$, равна разности мер B и A. Здесь уже содержалось требование счетной аддитивности меры для непересекающихся слагаемых, играющее очень важную роль в теориях интеграла.

Исключительная роль B-множеств определяется обстоятельством, которое особенно подчеркивал Лузин. Множество точек, где существует конечная производная ка-

кой-нибудь непрерывной функции, множество точек сходимости, а также точек абсолютной сходимости какого-либо тригонометрического ряда и т. д. — все это B-множества. Столь же фундаментально понятие B-измеримой функции $f(x)$, т. е. такой, что для любого C множество E точек x сегмента, на котором задано f, определенное условием $f(x) < C$, B-измеримо. Основные понятия анализа приводят к B-измеримым функциям. Относительно B-измеримых функций и множеств Лузин говорил, что их границы — суть вместе с тем границы анализа. Определения B-множеств и B-функций автоматически переносятся на n-мерные пространства. Интервал здесь множество $a_i < x_i < b_i$ $i=1, 2, \ldots, n$, его мера $(b_1-a_1)\ldots(b_n-a_n)$ и далее все, как при $n=1$. Этим самым все сказанное переносится на функции n-переменных $u=f(x_1, \ldots, x_n)$.

Впоследствии было показано, и прежде всего в знаменитых работах Лузина по дескриптивной теории множеств, а также в работах его последователей, что существуют операции, выводящие за пределы B-множеств (как показал М. Суслин, ортогональная проекция B-множества вообще не является B-множеством). Тем не менее, высказывания Лузина о роли B-множеств и B-функций в анализе полностью сохранили силу.

Интересно, что исходный пункт далеко идущей теории A-множеств (аналитических множеств) Лузина—Суслина—Серпинского опирается на введенное Борелем понятие счетно-разрывной функции — функции, разрывной не более, чем на счетном множестве значений аргумента. По мнению Бореля, класс этих функций заслуживает непосредственного изучения после непрерывных функций (см. его книгу [87], где приводятся основные результаты об этих функциях). A-множества — это множества значений счетно-разрывных функций. Как было показано, B-множества составляют лишь часть класса множеств A.

К сказанному важно добавить следующее: свойство быть B-множеством сохраняется при любых непрерывных взаимно-однозначных (топологических) преобразованиях пространства. Не все множества, измеримые по Лебегу, обладают этим свойством. Именно это со времени появления в 1931 г. классической работы Колмогорова определило исключительную роль борелевских множеств в теории вероятностей (вероятность — аддитивная функция на классе борелевских множеств [Л. 9]).

Интеграл Бореля. В одной из работ 1912 г. Борель предложил определение интеграла, вызвавшее критику со стороны Лебега и приведшее к дискуссии между ними. Для ограниченной измеримой функции оно основано на понятии сходимости по мере. Пусть на сегменте $q=[a,b]$ задана функция $f_n(x)$ и задана последовательность функций $\{f_n(x)\}$. Обозначим $\mu_n(\varepsilon)$ меру множества тех $x \in q$, для которых $|f-f_n| > \varepsilon$. Говорят, что f_n сходится по мере к f, если для любого ε имеет место $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(\varepsilon)=0$. Можно показать, что для любой ограниченной измеримой на q функции f существует последовательность p_n многочленов, сходящаяся к ней по мере.* При этом существует и предел $\lim \int\limits_q p_n dx$. Этот предел Борель называет интегралом от f по q. Для ограниченных измеримых функций класс интегрируемых таким образом функций совпадает с классом функций, интегрируемых по Лебегу, но Борель считает свое определение более конструктивным, поскольку полиномы p_n могут быть построены эффективно.

Эту точку зрения он подробно развивает в довольно большой статье «Вычисление определенных интегралов» [134], первая часть которой представляет собой сводное изложение его концепций конструктивного анализа, теории меры и измеримых функций. Во второй части этой работы Борель предлагает свое определение интеграла от неограниченной функции, по его мнению, более общее, нежели определение лебеговского интеграла. Особенность интеграла Лебега состоит в том, что интегралы $\int f dx$, $\int |f| dx$ существуют одновременно. Это делает его удобным в анализе, но Борель в поисках обобщений стремится построить интеграл от неограниченной функции, который мог бы сходиться не абсолютно, совпадая в частном случае с лебеговским.

Свою идею он излагает так. Известно, что для вычисления интеграла от неограниченной функции, например

$$f=\frac{1}{\sqrt{x-c}}, \quad f=\frac{1}{x-c}\sin\frac{1}{x-c},$$

* Это следует из одного предложения, часто называемого теоремой Бореля (см., например, *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. М., «Наука», 1974, с. 101—103, где также доказаны теоремы Фреше и Лузина, существенно уточняющие теорему Бореля).

полагают

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon'\to 0}\int_{c+\varepsilon'}^{b} f(x)\,dx.$$

Если эти пределы существуют, интеграл по определению сходится. Борель предлагает заменить это определение следующим: согласно определению римановского интеграла:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_1^n h_i f(\xi_i), \quad h_i = x_i - x_{i-1}.$$

Если у f имеется особая точка c, окружим ее интервалом исключения $(c-\varepsilon,\ c+\varepsilon')$ и предположим, что точки деления x_i находятся вне этого интервала. Если $x_{i-1} < c-\varepsilon < c+\varepsilon' < x_i$, мы положим:

$$h_i = x_i - (c+\varepsilon') + c - \varepsilon - x_{i-1} = x_i - x_{i-1} - \varepsilon - \varepsilon',$$

предполагая, что ξ_i находится в интервале $(x_{i-1},\ c-\varepsilon)$ или $(c+\varepsilon',\ x_i)$, но вне $(c-\varepsilon,\ c+\varepsilon')$.

Если определенная таким образом риманова сумма при любых ε, ε' стремится к пределу, который в свою очередь имеет предел при ε, ε', стремящихся к нулю, этот последний по определению и является интегралом

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Очевидно, это определение чисто формальное, если функция имеет конечное число особых точек. Дело обстоит иначе, если множество особых точек расположено всюду плотно на некотором интервале $\delta \subset (a, b)$. В этом случае следует допустить, что не только длина каждого интервала исключения стремится к нулю, но что и сумма их длин также стремится к нулю.

Сказанное приводит Бореля к такому определению. Пусть $f(x)$ — неограниченная на (a, b) функция. Предположим, что на этом интервале сосредоточено счетное множество точек $A_1, A_2, \ldots$, обладающее следующими свойствами: если каждое A_n заключим в такой интервал исключения (B_n, C_n), что ряд $\sum^{\infty} |B_n, C_n|$ сходится и имеет

сумму ε, обобщенные суммы Римана стремятся к пределу, каковы бы ни были эти интервалы, и этот предел в свою очередь стремится к пределу при $\varepsilon \to 0$. Последний, по определению, и есть интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$. Обобщенные римановы суммы $\Sigma\, h_i f(\xi_i)$ обладают следующими свойствами:

1) точки деления x_i не принадлежат интервалам исключения;

2) $h_i = (x_i - x_{i-1}) - \delta_i$, где δ_i — длина интервала исключения, если таковой содержится в (x_{i-1}, x_i);

3) ξ_i произвольно выбраны в (x_{i-1}, x_i), но не принадлежат интервалам исключения.

Итак, при названных допущениях находится предел римановых сумм, когда все $h_i \to 0$, а затем предел этого предела, когда стремится к нулю суммарная длина интервалов исключения.

Здесь, как подчеркивал Борель, использовано, что множество особых точек A_n имеет меру нуль, без чего интеграл существовать не может.

Борель отмечает, что его интеграл для функций нескольких переменных эквивалентен лебеговскому интегралу, поскольку кратный интеграл может сходиться только абсолютно. В то же время он считает действенным свое обобщение для одномерного интеграла. Последнее он подтверждает на ряде тонких примеров.

На этих примерах Борель, однако, убедился, что его попытка выйти за пределы лебеговского интеграла требует принятия специальных условий при выборе интервалов исключения. Другая возникшая трудность заключалась в следующем. Оказалось, что сумма двух интегрируемых, по Борелю, функций может не быть интегрируема (поскольку выбранные для одной функции интервалы исключения могут привести к расходимости второго интеграла). Эту трудность Борель пытался обойти следующим образом. Функция, не интегрируемая в изложенном выше смысле, может быть приведена к интегрируемой, если она может быть разложена на сумму двух интегрируемых функций (при этом под интегралом от функции будем теперь понимать сумму интегралов слагаемых). Борель устанавливает непротиворечивость подобного аргумента, показав, что если функция f двумя различными способами выражается

в виде суммы интегрируемых слагаемых, то «приведенный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$» имеет одно и то же значение.

Заканчивая статью [134], Борель говорит, что к понятию интервалов исключения для всюду плотного множества особых точек его привели проблемы теории аналитических функций.

Интеграл Бореля остался сравнительно мало замеченным, быть может, потому, что в 1912 г. появилась работа Данжуа, в которой было дано новое обобщение интеграла Лебега. Хотя интеграл Данжуа и не привился в прикладном анализе, он имел большое теоретическое значение, так как давал полное решение, не окончательно завершенной Лебегом проблемы восстановления функции по ее производной. Борель в статье [134] этой проблемы вовсе не касался. В 1916 г. интеграл Бореля глубоко и подробно исследовал Лузин, посвятивший ему ряд страниц в своей знаменитой диссертации «Интеграл и тригонометрический ряд» [Л. 5, 1].

Прежде всего, Лузин привел простой пример функции, интегрируемой по Лебегу, для которой интеграл Бореля не существует. Затем Лузин предложил свое обобщение борелевского интеграла, показав, что оно все же поглощается интегралом Данжуа. Наконец, Лузин построил еще одно обобщение интеграла Бореля, основанное на сочетании интегральных сумм Лебега с борелевским методом интервалов исключения. Однако, как почти тогда же показал юный Д. Меньшов, существуют функции, интегрируемые по Данжуа, но не интегрируемые в смысле и этого обобщения. Все это вместе с появившимися в те же годы работами по теории интеграла П. Александрова, Перрона и Хинчина вовсе погасило интерес к интегралу Бореля. Если в литературе о нем и упоминали, то как о мало удачной попытке обобщения Но дело не только в обобщении.

Идеи, с которыми связан борелевский интеграл, имеющие к тому же свои истоки в анализе, важны и сами по себе. Кстати, и Лузин отмечал, что интеграл Бореля интересен тем, что ставит новые проблемы. Некоторая реабилитация, хотя и косвенная, идеи борелевского интеграла все же наступила. Это было сделано на основе понятия линейного функционала и его продолжения Ганом и Ф. Риссом (римановы суммы рассматривались как задание

линейного функционала на множестве ступенчатых функций, последующие предельные переходы — как расширение функционала на множество суммируемых функций).

Об этих результатах Борель узнал много позднее, однако перед этим ему пришлось столкнуться с серьезными огорчениями не столько научного, сколько личного порядка, поводом к чему послужила работа [134].

Борель и его коллеги

Соотечественники. Мы говорили, что идеалами Бореля в науке были Коши и Пуанкаре, которым он, сознательно или нет, старался подражать всем характером своей деятельности — широтой творческого диапазона, новаторством, редкой научной продуктивностью. Вместе с тем Борель не разделял роялистских и клерикальных устремлений Коши и не высказывался в духе философских воззрений Пуанкаре.

Personalia в литературном наследии Бореля занимает скромное место — всего 50 страниц, почти половину из которых составляет его речь памяти Жоржа Юмбера [182], преемником которого по Академии стал Борель в 1921 г. Борель подчеркивает преданность Юмбера педагогической деятельности, приводя его слова: «Самой почетной смертью для себя я считаю смерть во время моей лекции». Юмбер в свою очередь был преемником Эрмита по Академии и работал в близких ему направлениях.

Еще в молодости Борель удостоился признания ведущих французских математиков старшего поколения — Дарбу, Пуанкаре, Аппеля, Пикара. Мы знаем также о дружбе, которая связывала его с несколько старшими его выдающимися математиками Адамаром и Пенлеве. Среди многочисленных учеников Бореля особо крупными учеными стали Фреше и Данжуа. Если Данжуа был сравнительно близок Борелю как по тенденциям, так и по тематике своей научной деятельности (теория роста функций, интеграл, моногенность и квазианалитические функции), то творческие установки Фреше были прямо противоположны борелевским. Вот как об этом говорит сам Фреше: «В то время как я часто искал общие черты в разных теориях, чтобы вывести из этого общую теорию, охватываю-

щую каждую из них, Борель путем тщательного и скрупулезного анализа частных случаев вводил новые понятия, значение которых выходило за пределы этих частностей. Этим, быть может, объясняется, что Борель всегда отдавал предпочтение конструктивным методам, более используемым в приложениях, в то время как я использовал дескрептивные методы, в теориях более удобные» [Л. 5, с. 5].

Фреше из скромности не назвал здесь таких своих созданий, как теория абстрактных пространств, своих теорем в нелинейном функциональном анализе, что, не говоря уже о его других достижениях, обеспечило ему почетное место в науке. В устах такого математика, как Фреше, исключительно высокое признание заслуг Бореля звучит особенно авторитетно. Предисловие к своей работе о Бореле Фреше начинает словами: «Нижеследующие строки были написаны как дань уважения ушедшему собрату по науке, который был не только великим математиком, интересовавшимся всеми формами человеческого познания, но и большим организатором и человеком действия» [Л. 5, с. 6].

Помимо работы о Бореле [Л. 5], Фреше явился также инициатором и составителем большого сборника научно-популярных и философских статей Бореля [303]. Все это делает честь благородству Фреше, тем более, что у него с Борелем бывали серьезные разногласия: «Я мог бы привести примеры, когда мы становились на прямо противоположные позиции, но это ни в коей мере не отразилось на наших личных отношениях. . . Я рассматриваю для себя как самую большую честь, — говорит далее Фреше, — быть дважды избранным на место, занимавшееся таким блестящим ученым: сначала по его кафедре на факультете наук, а затем по его креслу в Академии наук» [Л. 5, с. 6].

Учитывая большое влияние Бореля в Академии, избрание Фреше академиком лишь в 1956 г., когда ему было уже 78 лет, можно думать, давало повод для обиды, если учесть, что, например, Жюлья и Монтель — крупные, но, бесспорно, уступавшие Фреше ученые, не говоря уже о некоторых менее заслуженных математиках, были избраны в Академию значительно раньше. И это еще раз подчеркивает прекрасные нравственные качества Фреше. К счастью, он после избрания прожил еще долго, скончавшись на 96-м году.

Другим верным другом Бореля был его ученик Валирон — крупный специалист по комплексному анализу, автор большого количества работ по теории целых и мероморфных функций. Книги Валирона, в которых изложению результатов Бореля, естественно, уделялось большое место, переводились на иностранные языки, в том числе и на русский.

Не менее тесная дружба связывала Бореля с рядом выдающихся французских физиков. Кроме уже упоминавшихся Ланжевена и Ж. Перрена, он был особенно близок с одним из основателей квантовой механики Луи де Бройлем. Этим именем Франция гордится уже давно. В речи при вручении ему Золотой медали Нового центра научных исследований (НЦНИ) 24 января 1956 г. де Бройль сказал: «. . .Я очень сожалею, что состояние здоровья не позволило Эмилю Борелю, который был первым удостоен медали НЦНИ, присутствовать здесь в настоящий момент. Его присутствие дало бы мне возможность еще раз выразить ему мою признательность за ту роль, которую он сыграл в моей деятельности. Обладая известной вам широтой взглядов, Борель ясно видел, что Франция не занимает больше в теоретической физике того места, которое она должна занимать, и он с недюжинным упорством добивался создания нового института — института Анри Пуанкаре. Когда ему удалось осуществить свой замысел, он спросил меня, не соглашусь ли я занять одну из должностей в этом институте. . .» [Л. 3, с. 282].

Большая речь памяти Бореля, произнесенная де Бройлем в Академии, несомненно очень ценный биографический документ. В этой речи имеются и такие слова: «Те, кто близко знал выдающегося математика, могли убедиться в его исключительных качествах мыслителя и ученого, в его не менее исключительной способности воодушевлять. Никто не может отрицать прямоты и цельности его характера. . .

Может быть, его можно было упрекнуть в том, что иногда в своей деятельности он проявлял честолюбие. Но разве честолюбие не является естественным и даже законным для человека, чувствующего себя интеллектуально, морально и физически сильным, желающего взвалить на свои плечи груз, какой он может выдержать в виде обязанностей, которые бы позволили ему проявить себя? Если взвесить все это, мы можем сказать, что Борель имел пол-

ное право на наше восхищение и доверие» [Л. 3, с. 86].

Однако стремление Бореля везде и всюду поставить свое имя, его саморазбрасывание в математике и за ее пределами были антипатичны сдержанному и скромному Лебегу — человеку к тому же исключительно цельному. Из статьи памяти Лебега, написанной близко стоявшим к нему Л. Перреном,* Лебег предстает тихим и даже кротким человеком, любившим проводить вечера в задушевных беседах среди круга его учеников. Весь его труд был сочетанием высокого вдохновения и громадного напряжения сил.

Перефразируя слова Винера: «Ответы на вопросы, которые ставил Гиббс, нужно искать не у него, а у Лебега», можно сказать, ответы на вопросы о глубинном смысле понятий B-множеств и B-измеримых функций следует искать не у Бореля, а у Лебега. Показав, что функции, входящие в классификацию Бэра,** B-измеримы, Лебег определил их роль в анализе. В мемуаре «О функциях, представимых аналитически»,*** которым неоднократно восхищался Лузин (см., например, [Л. 11, 2, 35]), Лебег первым глубоко исследовал природу B-множеств, и эти его результаты, как подчеркивал Лузин, сыграли исключительную роль в теории аналитических множеств Лузина, Суслина, Серпинского и других.

В статье [134], о которой мы говорили, Борель, сознательно или нет, по существу, ставит себя рядом с Лебегом в метрической теории функций и теории интеграла — там, где заслуги Лебега безусловно являются превалирующими. В 1918 г. Лебег выступил против Бореля с большой резко полемической статьей «Замечания о теориях меры и интеграла»,**** направленной против этой работы. Статья Лебега была задумана ранее, примерно в 1912 г., но по

---

* *Perrin L.* Henri Lebesque renovateur de l'analyse moderne. Les grands courants de la pensée mathématique. Paris, 1948, p. 286—292.

** Эти классы определяются так: все непрерывные функции принадлежат классу 0, разрывные функции — пределы непрерывных — составляют класс 1, пределы функций класса 1, не принадлежащие классам 0 и 1, составляют класс 2 и т. д.

*** *Lebesgue H.* Sur les fonctions répresentables analytiquement. — J. Mathem., 1905, 1, 139—216.

**** *Lebesgue H.* Sur les théories de la mesure et de l'integration. — Ann. Ecole Normale. sup., sér. 3, 1918, 35, 191—250.

причинам военного времени ее выход задержался на шесть лет. Несмотря на сугубо научный характер критики Лебега, мотивы личной антипатии, по-видимому, здесь играли роль. «Атака» шла по трем направлениям. Лебег критиковал предложенный Борелем интеграл от неограниченной функции, критиковал общий конструктивизм Бореля в математике, решительно подчеркивал свое превосходство и свой приоритет в создании теории меры и интеграла. Кстати, достижения Лебега к тому времени получили всеобщее признание, о чем он, конечно, прекрасно знал. По всем этим пунктам Борель выразил свое несогласие с Лебегом в ответной статье [167].

Вернувшись к приведенному им в [134] примеру функции

$$f(x) = \sum_{1}^{\infty} e^{-n} \mid x - a_n \mid^{-1/2}$$

(a_n — рациональные точки сегмента [0, 1], занумерованные тем или иным образом), Борель, проводя подробно все рассуждения, показал, что она, не будучи интегрируемой по Лебегу, согласно его определению, интегрируема. Наиболее уязвимыми были замечания Лебега о том, что у Бореля теории интеграла, собственно, нет, а речь идет лишь об одном из определений интеграла, что Борель ничего не говорит о связи между функцией и ее интегралом. В своем ответе Борель малоубедительно замечает, что в данной работе он рассматривает интеграл прежде всего как среднее значение функции, благо вопрос о восстановлении первообразной после Лебега дополнительно был исследован Данжуа и другими авторами.

Многословно повторяя свои идеи относительно конструктивного анализа, Борель обвиняет Лебега в непоследовательности, упрекая его в том, что в свое время он сам критиковал аксиому выбора и стоял во многом на позициях, близких к борелевским. Сказав, что он не первый, с кем Лебег дискутирует о приоритете, Борель подчеркивает, что он всегда очень высоко ценил его работы, подчеркивая их принципиальное значение и новаторство. Вместе с тем Борель решительно напоминает, что в своих первых работах Лебег исходил из понятий и результатов Бореля, что их исследования протекали параллельно: «И так всегда бывает, когда два геометра одновременно разрабатывают одну и ту же тему». Хотя Борель, заканчивая свой ответ,

протягивает оппоненту руку и говорит, что дискуссия о приоритете была для него тягостной (penible), Лебег в том же журнале, что и раньше, публикует еще одну статью, содержащую новые упреки Борелю. Однако Борель от дальнейшей дискуссии отказался. В письме, адресованном в редакцию этого же журнала, показав на одном историческом примере из области расходящихся рядов, что дискуссии в математике часто бывали следствиями различных пониманий предмета, когда каждая из сторон по своему права, Борель отсылает желающих к своему предыдущему ответу и, отказываясь от дальнейшего спора, говорит: «. . .истина не обязательно на стороне того, кто произносит последнее слово».

Иностранцы. У Бореля было много друзей за границей, связи его простирались далеко за пределы Франции. Именно это позволило Борелю сделать основанную им серию монографий во многом международным делом. Среди авторов книг этой серии были скандинавы Линделеф, Карлеман, Неванлинна, итальянец Вольтерра, немецкий математик Блюменталь, венгерский математик Ф. Рисс, русский Лузин, поляк Серпинский. . . Конечно, большое значение имело и то обстоятельство, что в Париже постоянно бывали иностранные ученые, а французский язык — язык Декарта, Лагранжа, Коши — давно приобрел интернациональное значение.

Когда в начале 20-х годов сформировалась замечательная польская школа теории функций и множеств, у Бореля сразу же установились тесные отношения с ее ведущими представителями — Серпинским, Штейнгаузом, Куратовским и другими. Борель сотрудничал в польских математических журналах, был членом редколлегии одного из них. В 1935 г. в Варшаве вышел первый том журнала «Органон», который по замыслу его основателей должен был освещать актуальные вопросы наук, их историю и философию. В редакционном обращении к читателям этого тома говорилось, что редакция намерена опубликовать серию автобиографических документов выдающихся ученых современности, в которых они расскажут об особенностях своего мышления и творческого пути. Первым среди всех, кого в связи с этим редакция попросила высказаться, был Борель. Представляя читателю публикацию Бореля [244], редакция сопроводила ее такой характеристикой личности автора: «Эта серия начинается отчетом,

который нам любезно согласился предоставить Эмиль Борель, знаменитая научная деятельность которого эффективно дополняется его политической и социальной активностью. Автор всемирно известных математических работ, ученый и профессор, президент Парижской Академии наук, доктор honoris causa многих университетов, в том числе и университета Варшавы, Борель несет вместе с этим высокие обязанности государственного деятеля (следует перечисление многочисленных должностей, занимавшихся и занимаемых Борелем, — *Е. П.*). Эмиль Борель воплощает всем этим идеалы творческих научных сил в жизни общества».

Отношения Бореля с его английскими коллегами представляются сравнительно холодными. Разумеется, мы находим у крупнейших из них: Харди, Литлвуда, Титчмарша много упоминаний о Бореле, но часто они носят довольно сдержанный характер. Так, в известной фундаментальной книге Харди «Расходящиеся ряды» — хронологически второй после одноименной книги Бореля, содержащей массу нового материала и ряд исторических отступлений, ничего не говорится о том, что появление книги Бореля [56] явилось поворотным пунктом в теории расходящихся рядов. Действительно, как заметил Коллингвуд, за всю историю анализа количество работ по расходящимся рядам, опубликованных до выхода мемуара Бореля [41] и его книги [56], составило примерно 20. Количество публикаций по расходящимся рядам за первые 20 лет после ее выхода подскочило до двухсот.

Через несколько лет после книги Бореля по теории роста функций [117] появилась книга Харди на эту же тему — маленькая книга, очень богатая по содержанию. К сожалению, и здесь Харди не отдал должное своему предшественнику: вклад Бореля в теорию роста теряется среди обширной библиографии, содержащей много незначительных работ.

Зато можно констатировать исключительно благожелательное отношение к Борелю такого математика, как Лузин. Многочисленные ссылки на Бореля, которые мы встречаем в работах Лузина, по своему характеру свидетельствуют не только о научном признании, но и о чисто дружеском расположении. Со своей стороны, Борель ценил Лузина исключительно высоко. Его также очень интересовали

результаты рано ушедшего из жизни Суслина. В поздних книгах Бореля неоднократно встречаются имена П. С. Александрова, А. Н. Колмогорова, А. Я. Хинчина, выдающиеся достижения которых он оценивал по достоинству.

В заключение нашего рассказа о взаимоотношениях Бореля с коллегами приведем такие его примечательные слова: «Математика не безлична, человеческие симпатии и оппозиции играют важную роль в становлении нашей науки. . .» [244, с. 42].

Величественная старость и кончина

Медаль сопротивления. Польский периодический сборник «Органон», о котором говорилось выше, просуществовал недолго. В сентябре 1939 г. Польша пала под ударами гитлеровских орд. Не оказавшие ей реальной помощи, ее франко-английские союзники, не подготовленные к войне с хорошо организованным, вооруженным до зубов врагом, спешно консолидировали свои силы, возлагая надежды на линию Мажино. Наступил продолжавшийся несколько месяцев период, вошедший в историю под названием «странной войны».

В эти дни, полные тревог за будущее Франции, и не только Франции, те, кто стоял во главе французской науки и просвещения, друзья Бореля, решили отметить приближающееся время его выхода в отставку и приближающееся его семидесятилетие. Был подготовлен к изданию том избранных работ Бореля «Селекта» [260а], к которому Фреше, Данжуа, Валирон, П. Леви каждый в своей области написал примечания.

В январе 1940 г. в одной из аудиторий Коллеж де Франс под председательством министра просвещения Ивона Дельбо при максимально возможном для того времени числе присутствовавших состоялась трогательная, как ее назвал де Бройль, процедура чествования Бореля. «Все присутствующие единодушно почтили того, кто на протяжении полувека самоотверженно служил Франции, ее науке и культуре» [Л. 3, с. 82]. Но Борель еще был нужен Франции, и он доказал, что готов служить ей до конца.

Когда в сентябре 1939 г. начала функционировать созданная еще до войны Организация исследований для нужд национальной обороны, ее руководитель Анри Лешамбон, в то время директор Центра прикладных научных исследований, предложил, чтобы Институт Пуанкаре, директором которого, как мы знаем, был Борель, явился составной частью этой организации. Со свойственной ему исключительной энергией Борель сразу же включился в эту работу. Под его руководством были начаты интересные и важные исследования, и все усилия, как утверждает де Бройль, несомненно привели бы к существенным достижениям, если бы стремительный ход трагических событий не положил им конец.

Наступил май 1940 г.: бомбардировка Парижа, прорыв франко-бельгийского фронта, Дюнкерк, последние дни отчаянного сопротивления; выступление по радио премьер-министра Рено: «Я верю в чудо, потому что я верю во Францию». Но чуда не произошло. . . Потянулись тягостные дни оккупации. Борель не перестает работать, но, недвусмысленно дав понять свою неприязнь к коллаборационистскому режиму Виши, подает в отставку со всех своих многочисленных должностей.

Изображение Бореля, которое видит читатель — репродукция гравюры, выполненной с копии фотографии, присланной мне Даниелем Дюге. Борелю здесь 70 лет. Представляется, что выражение лица на этом снимке проникнуто мрачной сосредоточенностью. Какой контраст со спокойным выражением собственного достоинства, которое мы видим на снимке 1921 г. (см. обложку книги)!

Зимой 1941 г. Борель вместе с тремя другими членами Французской Академии, не без основания заподозренный во враждебных действиях, был арестован немцами и заключен в тюрьму Френ. Чудовищной мерой, вызвавшей возмущение во всех научных кругах, назвал де Бройль эту нормальную для гитлеровцев акцию. Как бы то ни было, но после более чем месячного пребывания в сырой холодной камере ученые были освобождены. Однако это не прошло бесследно: Борель заболел, перенес операцию, недуг затянулся. Во время своего выздоровления Борель с радостью узнал об открытии второго фронта и последующем освобождении Парижа.

«За свое мужественное поведение во время этого периода Борель был награжден Медалью сопротивления (как

Эмиль Борель, 1941 г.

известно, за участие в первой мировой войне он был награжден Военным крестом). Времена испытаний для Бореля кончились, он мог в течение еще долгого времени продолжать с поразительной энергией свою деятельность» [Л. 3, с. 82].

Последние годы. «В течение последних 15 лет жизни Борель не переставал печататься, проявляя неустанную деятельность уже в весьма преклонном возрасте. Приходится только удивляться количеству его статей, опубликованных в C. R. (доклады Академии наук Франции, — *Е. П.*). Они были посвящены различным вопросам арифметики, теории множеств, теории игр, теории вероятностей. Все это показывает, насколько мощным оставался его ум. Кроме того, он опубликовал несколько книг,

содержащих обзоры, выполненные на самом высоком уровне» [Л. 3, с. 83]. О ряде статей, которые здесь имеются в виду, уже говорилось выше. Знаменательно, что и на этом, последнем, этапе своего творчества Борель выступал как инициатор в новой трудной области — статистическом анализе теоретико-числовых проблем, точнее, проблем, связанных с классическими задачами теории простых чисел. Уже в первой заметке «Применение теории вероятностей к проблемам простых чисел» [261] устанавливается любопытный результат относительно теоремы Гольдбаха (напомним, она гласит: всякое четное число представимо в виде суммы двух простых чисел): всякое четное число $2a$ с вероятностью, большей $1-10^{-50}$, представимо в виде суммы двух простых чисел, одно из которых не превышает $50 \log^3 a$.

Вероятности здесь понимаются как относительные частоты появления простых чисел среди всех чисел натурального ряда. Используется закон пуассоновского распределения, а также один общий принцип, о котором мы скажем ниже. Результат был проверен Борелем для значений a в промежутке $(10^6, 10^6+200)$. Борель благодарит болгарского математика Ц. Зугарова за помощь при оперировании с таблицей простых чисел, а в заключение пишет: «Разумеется, эти доказательства не могут быть сравнимы с точными доказательствами теории чисел, но они заслуживают внимания, так как обогащают науку новыми методами».

Наиболее обстоятельной работой Бореля по теории простых чисел явилась статья «Элементарное рассмотрение частоты простых чисел в арифметической прогрессии» [301]. Ее тезисы, изложенные Борелем в одной предварительной заметке, таковы.

1) Пусть P — предложение, в формулировке которого фигурирует натуральное число k. Давая k все возможные значения, получим счетное множество предложений P_k. Если все они независимы друг от друга и вероятность того, что P_k не имеет места, стремится к нулю, когда $k \to \infty$, то можно быть уверенным, что существует бесконечное множество значений k, для которых P выполняется.

Этот принцип может быть применен к следующему предложению.

2) Пусть $0 < \sigma < 1$, p — простое число и n — произведение простых чисел, не превышающих p. Для любого

целого x в интервале $(x, x+p^{\sigma})$ имеется по крайней мере $\varphi(p)$ простых с n чисел в предположении, что $\varphi(p)$ — функция, растущая быстрее $p^{\sigma-\varepsilon}$ для любого $\varepsilon > 0$. Можно взять, например,

$$\varphi(p) = \frac{p^{\sigma}}{\log p}.$$

Используя затем метод решета Эратосфена, можно доказать следующее. Обозначим через a и b два взаимнопростых числа, не превышающих $p^{2-\sigma}$. Тогда по крайней мере для $\varphi(p)$ значений x значения арифметической прогрессии $ax+b$ являются простыми числами, не превышающими p^{σ}.

Статья [301], помимо доказательств и обсуждения названных предложений, содержит большой статистический материал по проверке некоторых известных теорем об асимптотике распределения простых чисел (кстати, Борель приводит новые упрощенные доказательства ряда из них). Эта часть работы была выполнена в 1938—1939 гг. совместно с Зугаровым, сотрудничество которого Борель весьма ценил. «К сожалению, — писал Борель, — я не имел никаких известий о Зугарове после того, как он в 1939 году уехал из Франции, направляясь к себе в Болгарию» [301, сноска].

Через год после публикации статьи [301] вышла маленькая книга Бореля «Простые числа» [302], где изложены элементы аналитической теории чисел, а также результаты Бореля по статистике и асимптотике простых чисел. Вообще, последние книги Бореля особенно увлекательны. Это в равной степени относится к книгам по теории множеств [266], [285], по теории вероятностей [292] и к книге «Недоступные числа» [299].

Более трехсот публикаций, среди которых много фундаментальных мемуаров и 35 книг, — таково литературное наследие Бореля!

Заслуженная слава Бореля приносила ему все более высокие награды. К концу жизни он стал кавалером ордена Большого креста, он входил в Совет Ордена почетного легиона. В 1955 г. Борель был удостоин Золотой медали НЦНИ.

В течение всей жизни Борель бы неутомимым путешественником. Он всюду нес доброе слово французской науки и культуры. Он посетил все, без исключения, страны Ев-

ропы, США, Канаду, Южную Америку (Мексику, Аргентину, Бразилию), Египет, Ливан, Турцию, Иран, Антильские острова, а в 1951 г. вместе с Адамаром побывал в Индии. С. Л. Соболев, который в это время также находился в Индии, рассказывал, что поражает своей энергией и подвижностью знаменитый французский математик Адамар; столь же бодр и энергичен другой 80-летний знаменитый французский математик Борель. В 1955 г., когда Борелю шел уже 85-й год, он принял решение участвовать в Международном конгрессе по статистике в Бразилии. Он сказал жене, которая противилась этой поездке: «Это будет мое последнее путешествие». К прискорбию, это действительно было так. На обратном пути он упал в самолете и получил травму, вызвавшую внутреннее кровоизлияние, явившееся началом его последней болезни. Несколько месяцев его крепкий организм боролся с недугом, но постепенно силы начали его покидать и вечером 3 февраля 1956 г. Борель скончался, прожив немногим более 85 лет.

Не будучи религиозным, он перед смертью в знак почтения к своим близким попросил о заупокойной молитве. Она состоялась в часовне Аффрикана, недалеко от которой Борель нашел последнее успокоение.

Эпилог. О том, какой личностью был Эмиль Борель, читатель теперь уже знает. Мы дополним сказанное выше лишь несколькими фразами.

Коллингвуд: «Со смертью Бореля ушла со сцены большая фигура современной математики, руководящий человек ушел из науки».

Фреше: «Эмиля Бореля больше нет. Большая пустота образовалась в математике и в науке вообще».

Монтель: «Успехи и почести никогда в нем не исключали несгибаемую правоту, абсолютную верность в дружбе, действенное великодушие, глубокую доброжелательность, которая иногда лишь вуалировалась кажущейся суровостью».

Простыми словами Маргариты Борель завершим мы рассказ об этом человеке: «Мой муж, Эмиль, как говорили его земляки авейронцы, был прежде всего человек честный. Кроме того, что он был честный, он еще был добрый. Но ничего показного не было в его доброте».

Основные работы Э. Бореля*

1890

5. Sur le changement de l'ordre des termes d'une série sémiconvergente. — Bull. Sc. Mathem., **14**, 2 sér., 97—102.

1892

6. Sur l'equation adjointe et sur certains systèmes d'équations différentielles. — Ann. l'Ecole Normale, **9**, 3 sér., 63—90.

1894

8. Sur quelques points de la théorie des fonctions. Thése, Paris. (Ann. l'Ecole Normale, 12, 3 sér. (1895) 9—55).
9 Sur une application d'un theoreme de M. Hadamard. — Bull. Sc. Mathem., **12**, 2 sér., 22—25.

1895

15. Sur les équations différentielles à coefficients constants et les fonctions non analytiques. — C. R., **121**, 933—935.**

1896

17. Sur la généralisation de la notion de limite et sur extention aux séries divirgentes du theoreme d'Abel. — C. R., **122**, 73—74.
19. Fondaments de la théorie des séries divirgentes sommables. — J. Mathem., **2**, 5 sér., 103—122.
20. Sur les séries des fonctions de deux variables réeles. — Ann. l'Ecole Normale, **13**, 3 sér., 79—94.
23. Sur les transformations en Geometrie. Lille—Paris. G. V.
24. Démonstration élémentaire d'une théoreme de M. Picard sur les fonctions entièrs. — C. R., **122**, 1045—1048.
27. Sur les séries de Taylor. — C. R., **123**, 1051—1052.

---

* Нумерация основных работ Э. Бореля соответствует полному списку его публикаций [304, т. 1].

** Здесь и далее C. R. — Compte rendue de l'Academie des Science.

28. Sur les séries de Taylor admettents leur cercle de convergence comme coupure. — J. Mathem., 2, 441—451.

1897

29. Sur les zéros des fonctions éntiers. — Acta math., 20, 357—396.
30. Sur l'interpolation. — C. R., 124, 673—676.
32. Sur les séries de Taylor. — Acta mathem., 21, 243—247.

1898

34. Léçons sur la théorie des fonctions. G. V.*
38. Sur les singularités des séries de Taylor. — Bull. Soc. Mathem. de France, 26, 238—248.
40. Sur les singularités d'une fonction définie par un série de Taylor. — C. R., 127, 1001—1003.

1899

41. Memoire sur les séries divirgentes (couronné par l'Acadèmie des Sciences. Grand prix des Sciences mathématiques). — Ann. Ecole Normale, 16, 3 sér., 9—131.
44. Sur la croissance des fonctions définies par des équations différentielles. — C. R., 128, 1281—1283.

1900

49. Léçons sur les fonctions entier. G. V.

1901

56. Léçons sur les séries divirgentes. G. V.
57. Sur les séries de polynomes et de fractions rationnelles. — Acta Mathem., 24, 309—382.
62. Contribution à l'étude des fonctions méromorphes. — Ann. Ecole Normale, 18, 3 sér., 211—239.

1902

66. Léçons sur les séries à térmes positives. G. V.

1903

70. Léçons sur les fonctions méromorphes. G. V.
75. Contribution a l'analyse arithmétique du continu. — J. Mathem., 5 sér., 9, 329—375.

1905

77. Détermination de classes singulieres de séries de Taylor. — C. R., 137, 695—697.

---

* Здесь и далее G. V. — Edition Gauthier Villars, Paris.

87. Léçons sur les fonctions de variables réele et les developpement en séries de polynomes. G. V.
89. Mémoire sur les deplacements à trajectoires sphériques (couronné par l'Academie des Sciences, Prix Vaillant). — Mem. presentés par savants étrangers, **33**, n **1**, 1—128.
91. Remarques sur les principes de la théorie des ensembles. — Mathem. Ann., **66**, 194—195.
92. Cinc lettres sur la théorie des ensemble. — Bull. Soc. Mathem. France, **33**, 261—273.
93. Remarques sur certaines questions de probabilités. — Bull. Soc. Mathem. France, **33**, 261—273.

1906

96. Sur les principes de la théorie cinétique de gaz. — Ann. École Normale, **22**, 3 sér., 9—32.

1907

101. L'évolution de l'intelligence en mathématique. — Rev. méthaphisique et morale, **15**, 747—754.
102. La relativité de l'éspace d'après M. Henri Poincaré. — Rev. mois, **4**, 115—118.
103. Un paradoxe économique: le sophisme du tas de blé. — Rev. mois, **4**, 688—699.

1908

104. Réponse à M. Bérgson. — Rev. methaphisique et morale, **16**, 244—245.
105. Le calcul des probabilités et la méthode des majorités. — L'années psychologique, **14**, 125—151.
110. Les paradoxes de la théorie des ensembles. — Ann. Ecole Normale, **25**, 3 sér., 443—448.

1909

111. Éléments de la théorie des probabilités. Paris, Hermann.
112. Les probabilités dénombrables et leur appliquation arithmétiques. — Rendiconti circolo mat. Palermo, **27**, 247—270.
115. Le continu mathematique et le continu physique. — Sci., **6**, 21—35.
116. La méthode de Poincaré. — Rev. mois, **7**, 77—91.
117. Léçons sur la théorie de la croissance. G. V.

1911

128. Jules Tannery. — Rev. mois, **11**, 5—16.
129. Les probabilites et M. Le Dantec. — Rev. mois, **12**, 77—91.

1912

131. Sur un probleme de probabilités relatif au fraction continues. — Mathem. Ann., **72**, 758—784.

134. Le calcul des intégrales définies. — J. Mathem., 8, sér., 159—210.
137. Modèles arithmétiques de l'irréversibilite apparante. — C. R. 154, 1148—1150.
145. Définition et domaine d'éxistence des fonctions monogènes uniforme. — Cambridge, C. R. du Congrés 1, 133—144.

1913

148. Les énsembles de mesure nulle. — Bull. Soc. Mathem., France, 41, 1—15.
150. La mécanique statistique et l'irrévercibilité. — J. Physique, 3, 5 sér., 189—196.

1914

154. Introduction géometrique à quelques théories physiques. G. V.
156. Le Hasard. Paris, Alcan.

1917

162. Léçons sur les fonctions monogènes d'une variable complexe. G. V.

1919

165. Sur la répartition probable et les fluctuations. Bull. Soc. Mathem. France, 46, 105—120.
167. Sur l'intégration des fonctions non bornées et sur les définitions constructives. — Ann. Ecole Normale, 36, 3 sér., 71—91.
169. Sur la classification des ensembles de mesure nulle. — Bull. Soc. Mathem. France, 47, 97—125.

1920

171. A propos de la définition de l'intégrale. — Ann. Ecole Normale, 37, 3 sér., 461—462.

1921

175. Léçons sur les fonctions éntièrs. 2 édition, augmentée. G. V.
178. La théorie des jeux et les équations intégrales. — C. R., 173, 1304—1308.

1922

181. Méthodes et problèmes de la théorie des fonctions. G. V.
182. Georges Humbert. — Mem. Acad. Sci., 58, 2 sér.
191. L'espace et le temp. Paris, Alcan.
194. D'Euclide et Descartes á Gauss et Darboux. — Le Temp, 15 aout.

1923

200. L'aviation (en collaboration avec P. Painlévé et Ch. Mauren). Paris. Alcan.

1924

201. Sur les jeux où le hasard se combine avec l'habilité des joueurs. — C. R., 178, 24—25.
208. Léçons sur les fonctions de variable réelles et les développements en séries de polynomes. 2 édition, augmenté. G. V.

1925

209. Traité du calcul des probabilités et ses applications. T. 1, fasc. 1. Principes et formules classiques. G. V.
210. Traité du calcul des probabilités et ses applications. T. 2, fasc. 3. Mécanique statistique classique. G. V.
212. Henri Poincaré. — Bull. Soc. Mathem. France, 49—54.

1926

214. Traité du calcul de probabilité et ses applications. T. 2, fasc. 1. Application a l'arithmétique et a la théorie des fonctions. G. V.
217. Paul Valéry et méthode scientifique. — Dans: Paul Valéry. Collection Les Contemporains. Paris, ed. Capitole.

1927

218. Sur le système de formes linéaires et la théorie des jeux. — C. R., 184, 52—54.

1928

226. Léçons sur les séries divirgentes, 2 édition entièrement remaniée. G. V.

1932

234. La géometrie et les imaginaires (avec R. Deltheil). Paris, Albin.

1935

244. Documents autobiografiques sur le psychologie de l'invention scientifique. — Organon, Warzava, 1, 33—42.

1937

247. Sur une probleme de stratégie. — C. R., 204, 307—310.
250. Éloge du jeu. — Mercure de France, 275, 290—301.

1938

253. Traité du calcul des probabilités et ses applications. T. 4, fasc. 2. Applications aux jeux de hasard. G. V.

1939

256. Traité du calcul des Probabilités et ses applications. T. 4, fasc. 3. Valeur pratique et philosophie des probabilités. G. V.

1940

260. Théorie mathématique du bridge à la portée de tous (avec S. Chéron). Monographies des Probabilités, fasc. 5. G. V.
260a. Sélecta. Jubilé scientifique d'Émile Borel. G. V.

1941

261. Application du calcul des pro babilités aux problèmes consernants les nombres premièrs. Theoreme de Goldbach. — C. R., **212**, 317—320.
262. Théorie de l'hérédité. Définitions et problèmes. Ibid., 777—780.
263. Sur certains problèmes de l'hérédité connexes au ruine des jouenres. — Ibid. 821—825.

1946

265. L'axiome du choix et la mesure des ensembles. — C. R., **222**, 309—310.
266. Les paradoxes de l'infini Paris. Gallimard.

1947

268. Sur les probabilités denombrables et le pari de Pascal. C. R., **224**, 77—78.

1948

276. Sur l'addition véctorielle des énsembles de mésure nulle. — C. R., **227**, 103—105.

1949

285. Eléments de la théorie des ensembles. Paris, Albin.
286. Le paradoxe de Saint Pétersbourg. — C. R., **229**, 404—405.

1950

289. Sur les chiffres decimaux de $\sqrt{2}$ et divers problèmes en chaine. — C. R., **230**, 590—593.
291. Léçons sur la théorie des fonctions. 4 édition. — G. V.
292. Probabilité et cértitude. Presses universitaires.

1951

295. Les decimales de e et π. — C. R., **233**, 1973—1974.
298. Sur la transmission d'une caractere héréditaire. — C. R., **233**, 1241—1243.
299. Les nombres innaccessibles. G. V.

1953

301. Étude de la frequence des nombres dans les progressions arithmetiques. — Rend. Circ., mathem. Palermo, (2), **1**, 111—128.
302. Les nombres premièrs. Presses universitaires.

303. Borel Émile. Philosophe et Homme d'action. G. V.
304. Oeuvres de Emile Borel. T. 1—4. Edition du Centre national de la récherche scientifique. Paris, 1972.

Литература

1. *Montel P.* Notice nécrologique sur Émile Borel. — C. R., 1956, **242**, 845—850.
2. *Moren Ch.* Émile Borel. — Bull. Assoc. ancients, élèves de l'École Normale, 1957, 29—32.
3. *De Brogle L.* Notices et Discours. — Acad. Sc., 1957, 4, 1—24; Жизнь и труды Эмиля Бореля. — В кн.: *Де Бройль Л.* По тропам науки. Перевод с фр. С. Ф. Шушурина. М., ИЛ, 1962, 66—83.
4. *Collingwood E. F.* Émile Borel. — J. London Mathem. Soc., 1959, 488—512.
5. *Fréchet M.* La vie et l'oeuvre d'Émile Borel. — L'Enseignement mathem., 1965, **14**, sér. 2, 1—97.
6. *Медведев Ф. А.* Французская школа теории функций и множеств на рубеже XIX—XX вв. М., «Наука», 1976.
7. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. М., «Наука», 1970.
8. *Евграфов М. А.* Аналитические функции. М., «Наука», 1968.
9. *Колмогоров А. Н.* Основные понятия теории вероятностей. М., «Наука», 1973 (2-е изд.).
10. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М., ГТТИ, 1956.
11. *Лузин Н. Н.* Собр. соч. Т. 1, 2. М., Изд-во АН СССР, 1957—1958.
12. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. Т. 1, 2. М., «Наука», 1967—1968; Краткий курс теории аналитических функций. М., «Наука», 1977.
13. *Медведев Ф. А.* Очерки истории теории функций действительного переменного. М., «Наука», 1965.
14. *Постников А. Г.* Арифметическое моделирование случайных процессов. — Тр. матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, вып. 57. М., 1960, с. 1—84.

Основные даты жизни и деятельности Э. Бореля

1871 г. 7 января — в Авейроне, на Юге Франции, в семье пастора Оноре Бореля и Эмилии Тейсье родился Эмиль Борель.

1882—1888 — учеба в лицее города Монтобана.

1888—1889 — стипендиат коллежа св. Варвары и лицея св. Людовика в Париже.

1889—1892 — слушатель Эколь Нормаль в Париже. Начало научной деятельности.

1893—1896 — преподаватель Лилльского университета. Диссертация по теории функций (1894).

1896 — переезд в Париж. Профессура в Эколь Нормаль. Первая книга по теории функций (1898).

1897—1912 — пятнадцатилетний период творческой деятельности в области анализа. Основание серии монографий по теории функций.

1901 — женитьба на Маргарите Аппель.

1906 — основание супругами Борель литературно-философского и научно-популярного журнала «Ревю дю муа».

1909—1913 — первые книги по теории вероятностей и теоретической физике. Директор Эколь Нормаль (1910).

1914—1918 — участие в обороне Франции в годы первой мировой войны.

1920 — реорганизация Эколь Нормаль и уход с должности директора.

1921 — избрание действительным членом Академии наук Франции.

1924 — избрание в парламент от партии радикал-социалистов. Выход первой книги серии «Трактат по теории вероятностей».

1924—1940 — работы по приложениям теории вероятностей, стратегическим играм и теоретической арифметике.

1940—1945 — участие в движении сопротивления.

1946—1955 — выход новых книг Бореля по теории вероятностей, теории множеств, теоретической физике, арифметике.

1956 г. 3 февраля — кончина Эмиля Бореля.

Оглавление

Введение 5

Детство и юность. Годы учения. Начало творчества 7

Семья Оноре Бореля. Коллеж св. Варвары и Эколь Нормаль. Первые друзья и учителя Эмиля. Софус Ли в Париже. Борель-геометр.

Главное направление 20

Диссертация и знаменитая лемма. Аналитические функции. Первая книга по анализу. Встреча с Георгом Кантором. Серия монографий по теории функций.

Литературная деятельность 31

Маргарита Аппель. Борель и Поль Валери. Диалог «Апология игры». Журнал «Ревю дю муа» и его авторы. Борель о Пуанкаре. Дискуссии с Анри Бергсоном.

Война 1914—1918 и двадцать лет спустя 43

Тяжелые испытания. Мир. Новые начинания. В Академии наук. Борель и политика.

Из вещественного анализа 51

Теория роста функций. Другие вопросы.

Расходящиеся ряды 58

Конкурсный вопрос Французской Академии наук. Метод суммирования Бореля. Приложение метода.

Функции комплексной переменной 69

Ряд Тейлора и аналитическое продолжение. Целые функции. Мероморфные функции. Моногенность без аналитичности.

Устами его знавших 88

Борель-полемист. Независимость характера.

Теория вероятностей 92

Философский и прикладной аспекты. Метод большинства в статистике. Вероятность и достоверность. Древний софизм кучи зерна. Физическая непрерывность. Нормальные числа и десятичные разложения. Алфавитная нумерация. Статистическая механика. Генетика. «Вероятности и г-н ле Дантек».
Математический аспект. Счетные вероятности. Арифметика континуума.

Теория игр 129

Стратегические игры. Приоритет в теории стратегических игр.

Множества, мера, интеграл 135

Конструктивный подход Бореля. Мера. Интеграл Бореля.

Борель и его коллеги 146

Соотечественники. Иностранцы.

Величественная старость и кончина 153

Медаль сопротивления. Последние годы. Эпилог.

Основные работы Э. Бореля 159

Литература 165

Основные даты жизни и деятельности Э. Бореля 166

Ефим Михайлович Полищук

ЭМИЛЬ БОРЕЛЬ

Утверждено к печати
Редколлегией серии «Научно-биографическая литература»

Редактор издательства *Т. И. Сушкова*
Художник *Д. С. Данилов*
Технический редактор *Р. А. Кандратьева*
Корректоры *О. В. Олендская* и *Л. А. Привалова*

ИБ № 8973

Сдано в набор 29.11.79. Подписано к печати 25.03.80. М-10681. Формат 84×108[1]/32. Бумага типографская № 2. Гарнитура обыкновенная. Печать высокая. Печ. л. 5[1]/4 = 8.82 усл. печ. л. Уч.-изд. л. 8.73. Тираж 15700. Изд. № 7617. Тип. зак. 935. Цена 25 к.

Ленинградское отделение издательства «Наука»
199164, Ленинград, В-164, Менделеевская лин.,

Ордена Трудового Красного Знамени
Первая типография издательства «Наука»
199034, Ленинград, В-34, 9 линия, 12